R
F 1509/15
48. 1986.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

1988

ELECTROTEHNICĂ

TOMUL XLVIII, ANUL 1986

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL : Prof. dr. ing. *Voicu Tache*
MEMBRII : Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* ; Conf. dr. ing. *Cornel Berbente* ; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan* ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific) ; Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu* ; Prof. dr. docent *Felicia Cornea* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* ; Prof. dr docent *Traian Demian* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea* ; Prof. dr. ing. *Julieta Florea* ; Prof. dr. ing *Nicolae Geru* ; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* ; Prof. dr. *Ion Grădișteanu* ; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan* ; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu* ; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu* ; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu* ; Prof. ing. *Jean Moncea* ; Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț* ; Prof. dr. docent *Florea Oprea* ; Prof. dr ing. *Aurel Oprean* ; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu* ; Prof. dr. ing. *Ion Popescu* ; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș* ; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca* ; Prof. dr. ing *George Rulea* ; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. *Octavian Stănășilă* ; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu* ; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea* ; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu* ; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu* ; Academician *Radu Voinea*.

Editor : Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378, Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

M. Roşculeţ, Victoria Stanciu

Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale. XII. Ecuaţii cu derivate parţiale, simultane, de tip parabolic şi eliptic. Formulă de medie 3

Elena Deciu

Asupra unor proprietăţi ale nodurilor operatoriale adjuncte pe spaţii Hilbert complexe (l. engleză) 9

Silvia Bontaş

Prelucrarea pe calculator a unui algoritm de determinare a subclaselor unei clase de stări a unui lanţ Markov 19

D. Marcu

Asupra mulţimilor închise ale unui matroid 25

Maria Honciuc, E. Sofron

Efectele unor factori externi asupra tranziţiilor de fază ce apar în mixturi colesterice binare 31

V. A. Popescu

Combinarea metodei perturbaţiilor succesive cu tehnica de sumabilitate Padé-Borel . . 93

A. Moraru, F. Manea

Metodă pentru calculul pierderilor Joule în armăturile inelare ale liniilor electrice aeriene 43

D. Stanomir

Principii variaţionale. Formularea prin staţionaritatea puterii (l. engleză) 51

M. Iordache, Lucia Dumitriu, C. Mierlea, M. Georgescu

Generarea fără repetiţii a arborilor dintr-un graf printr-o tehnică de calcul cu matrice rare 57

P. Noţingher

Influenţa solicitărilor mecanice asupra străpungerii dielectricilor termorigizi 65

Lucia Dumitriu, C. Dumitriu

Contribuţii la studiul regimurilor termice ale cablurilor de putere 75

I. Constantin, I. Ceapă, N. Coţanis

Codor 5B/6B utilizat în transmisiile digitale pe fibră optică cu viteza de 8 Mb iţi/sec. 85

D. A. Stoichescu

Generatoare de secvenţa pseudoaleatoare cu registre de deplasare cu reacţie cu structură variabilă (l. engleză) 93

A. Mihalache

Asupra unui paradox în teoria fiabilităţii 97

1.50 J
FOLYÓIRAT
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Summary

M. Roşculeţ, Victoria Stanciu

Integral Operators Generalising Partial Differential Equations 3

Elena Deciu

On Some Properties of the Adjoint Operator Nodes on Complex Hilbert Spaces . . . 9

Silvia Bontaş

An Algorithm for Establishing the Period and the Subclasses of a Markov Chain Class 19

D. Marcu

On the Closed Sets of a Matroid 25

Maria Honciuc, E. Sofron

The Effects of Some External Factors on Phase Transitions that Appear in Binary Cholesteric Mixtures 31

V. A. Popescu

A Joint Method Combining the Succesive Perturbation Method with the Padé-Borel Summability Technique 39

A. Moraru, F. Manea

Method for Calculation of the Joule Losses in Arcing Rings of the Electrical Overhead Lines 43

D. Stanomir

Variational Principles. Power Stationarity Formulation 51

M. Iordache, Lucia Dumitriu, C. Mierlea, M. Georgescu

Generation without Duplication of All Trees in a Conex Graph 57

P. Noţingher

Influence of Mechanical Stress on Thermorigid Dielectrics Breakdown 65

Lucia Dumitriu, C. Dumitriu

Power Cable Thermal Analysis 75

I. Constantin, I. Ceapă, N. Coţanis

5B/6B Encoder for *8* Mbits/s Optical Fiber Data Transmission 85

D. A. Stoichescu

Variable Shift-Register Generators 93

A. Mihalache

On a Paradox in Reliability Theory 97

C.Z.: 517.987
517.44

OPERATORI INTEGRALI CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIILE DIFERENȚIALE

XII. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE, SIMULTANE, DE TIP PARABOLIC ȘI ELIPTIC. FORMULĂ DE MEDIE

M. ROȘCULEȚ, VICTORIA STANCIU*

Fie $f(x\,;\,y\,;\,t)$ o funcție analitică în $D_m \times R^n \times [0, a]$, cu $D_m \subset R^m$. Autorii obțin desfășurarea (4) cu E_p dat de (4′). Utilizînd acest rezultat obțin formula de medie (5) conținută în teorema 2 și relația (6′) din teorema 3.

1. Fie $f(x,\,;\,y,\,t)$ o funcție analitică în $D_m \times R^n \times [0,\,a]$ cu $D_m \subset R^m$. Să considerăm integrala

$$I = \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{S_m^*(R)} \int_{S_m(R,x)} \mathrm{d}v_m \int_{R^n} e^{-\eta^2} f(x + R\xi\,;\; y + h\eta,\; t + h^2)\,\mathrm{d}\eta, \qquad (1)$$

unde am notat

$$(x + R\xi) = (x_1 + R\xi_1,\, x_2 + R\xi_2,\, \ldots,\, x_m + R\xi_m)$$

cu

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 = 1, \text{ iar}$$

$$(y + h\eta) = (y_1 + h\eta_1,\; y_2 + h\eta_2,\; \ldots,\; y_n + h\eta_n)$$

$$\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2,\quad \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\eta_1\,\mathrm{d}\eta_2 \ldots \mathrm{d}\eta_n;$$

$\mathrm{d}v_m$ este elementul de volum al sferei $S_m(R, x)$ de centru x și rază R din R^m. În ipoteza că f este analitică în toate variabilele x, y, t putem scrie

$$f(x + R\xi\,;\; y + h\eta, t + h^2) = f(x, y, t) +$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{1}{p\,!}\left[R\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) + h\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \eta_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right) +\right.$$

* Prof. dr. ing.; Asist., catedra Matematici

$$+ h^2 \frac{\partial}{\partial t}\Big]^{(p)} f(x; y, t) = f(x, y, t) + \sum_{p_1+p_2+p_3=1}^{\infty} \frac{R^{p_1} h^{p_2+2p_3}}{p_1!\, p_2!\, p_3!} \Big[\Big(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots$$

$$\dots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}\Big)^{p_1}\Big(\eta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial}{\partial y_n}\Big)^{p_2} \frac{\partial^{p_3}}{\partial y^{p_3}}\Big] \cdot f(x, y, t)$$

încît cu explicitările

$$\Big[R\Big(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}\Big)\Big]^{p_1} = \frac{R^{p_1} p_1!}{\alpha_1!\alpha_2! \dots \alpha_m!} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_m^{\alpha_m} \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

şi

$$\Big[h\Big(\eta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial}{\partial y_n}\Big)\Big]^{p_2} =$$

$$= \frac{h^{p_2} p_2!}{\beta_1!\, \beta_2! \dots \beta_n!} \eta_1^{\beta_1} \dots \eta_n^{\beta_n} \frac{\partial^{p_2}}{\partial y_1^{\beta_1} \partial y_2^{\beta_2} \dots \partial y_n^{\beta_n}}$$

rezultă desfăşurarea pentru $f(x + R\xi, y + h\eta, t + h^2)$,

$$\sum_{p=p_1+p_2+p_3=0}^{\infty} \Big[\sum_{p_1} \sum_{p_2} \frac{R^{p_1} h^{p_2+2p_3}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \dots \alpha_m!\, \beta_1!\, \beta_2! \dots \dots \beta_n!\, p_3!} \times$$

$$\times\, \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_m^{\alpha_m} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} \frac{\partial^p f(x, y, t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m} \partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_n^{\beta_n} \partial t^{p_3}}\Big]$$

pe care să o introducem în (1). Deoarece integralele

$$\frac{R^{p_1}}{\alpha_1! \dots \alpha_m!\, S_m^*(R)} \int_{S(R,\, x)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_m^{\alpha_m}\, dv_m$$

sînt nule dacă nu toţi α_i sînt pari, iar pentru $\alpha_i = 2\alpha_i^*$, $p_1 = 2p_1^*$ au valoarea

$$\frac{1}{2^{2p_1^*}} \frac{\pi^{-\frac{m}{2}}}{R^m} \frac{R^{2p_1^*+m}}{(2\alpha_n^*)! \dots (2\alpha_m^*)!} \cdot \frac{(2\alpha_1^*)! \dots (2\alpha_m^*)!}{\alpha_1^*! \dots \alpha_m^*!} \frac{\Gamma\Big(\frac{m}{2}+1\Big)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\Big(\frac{m}{2}+p_1^*+1\Big)}; \quad (2)$$

în care dacă ţinem seamă că

$$\Gamma\Big(\frac{m}{2}+p_1^*+1\Big) = 2^{p_1^*}(m+2)(m+4) \dots (m+2p_1^*)\, \Gamma\Big(\frac{m}{2}+1\Big)$$

ne dă

$$(2') \quad \frac{R^{2p_1^*}}{2^{p_1^*}} \frac{1}{\alpha_1^*! \dots \alpha_m^*!} \cdot \frac{1}{(m+2)(m+4)\dots(m+2p_1^*)}.$$

Integralele

$$\frac{h^{p_2+2p_3}}{\beta_1! \dots \beta_n! p_3!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_1^2} d\eta_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_n^2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} d\eta_n$$

sînt de asemenea nule dacă nu toți β_i sînt pari, iar pentru $\beta_i = 2\beta_i^*$, $p_2 = 2p_2^*$, au valoarea

$$\frac{h^{2p_2^*+2p_3}}{(2\beta_1^*)! \dots (2\beta_n^*)! p_3!} \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{2p_2^*} \frac{(2\beta_1^\alpha - 1)!! \dots (2\beta_n^\alpha - 1)!!}{(2\beta_1^\alpha)! \dots (2\beta_n^\alpha)!}; \tag{3}$$

însă

$$\frac{(2\beta_i^\alpha - 1)!!}{(2\beta_i^\alpha)!} = \frac{1}{2\beta_i^\alpha (\beta)_i^\alpha!}$$

încît (3) se scrie

$$\frac{h^{2p_2^\alpha+2p_3}}{2^{2p_1^\alpha}} \cdot \frac{1}{\beta_1^\alpha! \beta_2^\alpha! \dots \beta_n^\alpha! \beta_3!} \tag{3'}$$

Dacă păstrăm pe β_i^* fiși cît și pe p_3, apoi pe p_1^* fix însă α_i^* variabili, observăm că putem scrie termenul (2), după ce introducem și operatorul diferențial în care intervin $x_1, x_2, \dots, x_m$, astfel

$$\frac{a_{p_1}^\alpha}{p_1^\alpha!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \right)^{p_1^\alpha} = \frac{a_{p_1}^\alpha}{p_1^\alpha!} \Delta^{p_1^\alpha}$$

unde am notat

$$a_{p_1^\alpha} = \frac{R^{2p_1^\alpha}}{2^{p_1^\alpha}} \cdot \frac{1}{p_1^\alpha!} \frac{1}{(m+2)(m+4)\dots(m+2p_1^\alpha)}$$

Dacă păstrăm pe α_1^α fiși, pe $p_2^\alpha + p_3 = q$ fix, însă β_i^α și p_3 variabili cu $\Sigma\beta_i^\alpha + p_3 = q$, observăm că termenul (3) se scrie, dacă introducem și operatorul diferențial în care intervin $y_1, y_2, \dots, y_n, t$, astfel

$$\frac{C_q}{q!} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \dots + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y_n^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^q = \frac{C_q}{q!} \Box^q$$

cu $C_q = h^{2q}$.

Cu aceste elemente enunţăm

Teorema 1. O funcţie analitică în $D_m \times D_{n+1}$, satisface pentru orice $S_m(R) \subset D_m$ şi $R^n \times [0, a] \subset D_{n+1}$, următoarea relaţie integrală

$$\frac{1}{S_m^{\alpha}(R)\,\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{S_m(R,\,x)} \mathrm{d}v_m \int_{R^n} \mathrm{e}^{-\eta^2} f(x + R\xi, y + h\eta, t + h^2)\,\mathrm{d}\eta = \tag{4}$$

$$= f(x, y, t) + \sum_1^{\infty} E_p f(x, y, t),$$

unde E_p este operatorul diferenţia l

$$E_p \equiv \frac{a_{p0}}{p\,!}\Delta^p + \frac{a_{p-1,1}}{(p-1)\,!\,1\,!}\Delta^{p-1}\square + \ldots + \frac{a_{p-k,k}}{(p-k)\,!\,k\,!}\Delta^{p-k}\square^k + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a_{0p}}{p\,!}\square^p \tag{4'}$$

şi

$$a_{p-k,k} = \frac{R^{2(p-k)}}{2^{p-k}} \cdot \frac{h^{2k}}{(m+2)(m+4) - (\ldots(m+2p-2k)}$$

cu notaţiile

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}, \quad \square = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y_n^2} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Demonstraţie. Existenţa integralei pe S_m cere ca f să fie analitică în D_m şi S_m să fie interioară lui D_m. Existenţa integralei pe R^n cere ca să existe două numere M şi K, pozitive, astfel încît pentru f analitică în $T_{n+1} = R^n \times [0, a]$ şi T_{n+1} interior lui D_{n+1} să avem

$$|f(x, \eta, t)| \leqslant Me^{K\eta^2}, (x, \eta, t) \in D_m \times D_{m+1}$$

În aceste condiţii avem voie să integrăm termen cu termen.
Dacă ţinem seamă de (3) şi (4) obţinem relaţia din enunţ. q.e.d.

Teorema 2. Soluţiile analitice în $D_m \times D_{n+1}$, ale sistemului de ecuaţii parţiale cu o singură funcţie necunoscută (ecuaţii simultane)

$$\frac{\partial^2 f.}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial y_n^2} + 4\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

cu $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D_m$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \in R^n \times [0, a] \subset D_{n+1}$, verifică

următoarea formulă de medie

$$f(x, y, t) = \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{S_m^*(R)} \int_{S_m(R,x)} dv_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_1^2} d\eta_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_n^2} f(x + R\xi, y + h\eta, t + h^2) d\eta_n \quad (5)$$

unde $S_m(R, x)$ este o sferă de centru x și rază R interioară lui D_m iar $S_m^*(R)$ volumul lui $S_m(R, x)$.

Teorema 3. Soluțiile analitice în $D_m \times D_{n+1}$ ale sistemului de ecuații simultane

$$\Delta^p f = 0, \ \Delta^{p-1} \square f = 0, \ \ldots, \ \Delta \square^{p-1} f = 0, \ \square^p f = 0, \quad (6)$$

verifică următoarea relație integrală

$$\frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{S_m^*(R)} \int_{S_m(R,x)} dv_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_1^2} d\eta_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_n^2} f(x + R\xi, y + h\eta, t + h^2) d\eta_n = \quad (6')$$

$$= f(x, y, t) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{a_{k0}}{k!} \Delta^k + \frac{a_{k-1,1}}{(k-1)1!} \Delta^{k-1} \square + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{a_{1,k-1}}{1!(k-1)!} \Delta \square^{k-1} + \frac{a_{0k}}{k!} \square^k \right) f(x, y, t)$$

cu $a_{k-s,s}$ dați de (4′) și notațiile din teorema 1.

Demonstrație. Observăm că dacă f verifică sistemul (6) atunci verifică și sistemul

$$\square^{r-k} \Delta^k f = 0, \ r > p, \ k = 0, 1, \ldots, r, \quad (6'')$$

deci relația din enunț este o consecință a relației (4) din teorema 1; q.e.d.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Roșculeț*, Ecuații diferențiale și aplicații. Analiticitate, operatori integrali, formule de medie, Ed. Ac. R.S.R., 1984.
2. *V. Stanciu, M. Roșculeț*: Operatori integrali care generalizează ecuațiile diferențiale. IX Sisteme de ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic. Formule de medie, Bul. IPB, tomul XLV, 1983.

Opérateurs intégraux qui généralisent les équations différentielles.
II. Equations aux dérivées partielles, simultanées, de type parabolique et elliptique. Formule de moyenne.

Soit $f(x ; y ; t)$ une fonction analytique en $D_m \times R^n \times [0, a]$ avec $D_m \subset R^m$. Les auteurs obtiennent le développement (4) avec E_p donné par (4′). En utilisant ce résultat on obtient la formule de moyenne (5), contenue dans le th. 2 et la relation intégrale (6), contenue dans le th. 3.

C.Z.: 514.774

ON SOME PROPERTIES OF THE ADJOINT OPERATOR NODES ON COMPLEX HILBERT SPACES

ELENA DECIU*

In [1] is given the notion of an operator node in the context of the complex Banach spaces. We shall use it in the context of the complex Hilbert spaces. This context allows us to introduce [4] the notion of an adjoint node. We studied the multiplication, the divisibility and the Möbius transformations for the adjoint nodes.

1. In this paper, we shall deal with complex Hilbert spaces and with linear continuous operators acting on these spaces, called, in short, „operators". We mean [1] by an operator node, in short, „node", a system $\theta = (A, B, C, D; X, U, Y)$ of three complex Hilbert spaces: X, U, Y, and four operators: $A : X \to X$, $B : U \to X$, $C : X \to Y$ and $D : U \to Y$. The spaces U, X and Y are called the input space, the state space and the output space of θ, respectively. The operator A is called the main operator of θ. We may give [4] the following:

Definition 1.1. The node $\theta = (A^*, C^*, B^*, D^*; X, Y, U)$ *is called the adjoint node of* θ. (The operators A^*, B^*, C^*, D^* are the adjoint operators of A, B, C, D, respectively).

Two nodes $\theta_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1; X_1, U, Y)$ and $\theta_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2; X_2, U, Y)$ are said [1] to be similar, written: $\theta_1 \simeq \theta_2$, if: 1°. $D_1 = D_2$; 2°. there exists an invertible operator $S : X_1 \to X_2$, called a node similarity, such that:

$$SA_1 = A_2S, \quad B_2 = SB_1, \quad C_1 = C_2S. \tag{1.1}$$

Proposition 1.2. Let θ_1 *and* θ_2 *be two similar nodes by the node similarity* S. *Then, their adjoint nodes* θ_1^* *and* θ_2^* *are, too, similar; namely by the node similarity* S^*.

Proof. From the relations (1.1), we have, taking the adjoint operators,

$$A_1^*S^* = S^*A_2^*, \quad B_2^* = B_1^*S^*, \quad C_1^* = S^*C_2^*, \tag{1.2}$$

and we keep in mind the fact that the relation of node similarity is one of equivalence Q.E.D.

* Lecturer, chair of Mathematics

For the node $\theta = (A, B, C, D; X, U, Y)$, the transfer function W_θ is defined [1] by the expression:

$$W_\theta(\lambda) = D + C(\lambda I - A)^{-1}B, \qquad \lambda \in \rho(A), \tag{1.3}$$

where $\rho(A)$ is the resolvent set of A. We have, obviously, the

Proposition 1.3. The transfer function of the adjoint node θ^* is given by the expression:

$$W_{\theta^*}(\lambda) = D^* + B^*(\lambda I - A^*)^{-1}C^*, \quad \lambda \in \rho(A^*) \tag{1.4}$$

We have, also, the

Proposition 1.4. Between the transfer function of a node θ and the ransfer function of its adjoint node θ^*, there exists the following relation:

$$W_{\theta^*}(\lambda) = W_\theta(\overline{\lambda})^*, \qquad \lambda \in \rho(A^*). \tag{1.5}$$

Proof. Let us remark that the resolvent set

$$\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} = \{\overline{\lambda}, \lambda \in \rho(A)\}. \tag{1.6}$$

Then, we shall obtain the relation (1.5) by a simple calculation Q.E.D.

The transfer function W_θ is an analytic operator function defined on an open neighbourhood of ∞ on the Riemann sphere $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ The operator $D = \lim_{\lambda \to \infty} W_\theta(\lambda)$ is called the external operator of θ. In the system theory, the transfer function describes the input/output behaviour of a linear dynamical system.

To the node θ, we may associate the linear dynamical system S, given by the state equations:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

and to the adjoint node θ^*, we may associate [4] the adjoint system S^*, given by the state equations:

$$\dot{x}(t) = A^*x(t) + C^*y(t), \quad u(t) = B^*x(t) + D^*y(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Let $\theta_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1; X_1, W, Y)$ and $\theta_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2; X_2, U, W)$ be two nodes such that the output space of θ_2 coincides with the input space of θ_1. We define [1] the product of θ_1 and θ_2, denoted by $\theta_1\theta_2$, as being a node $\theta = (A, B, C, D; X, U, Y)$, where: $X = X_1 \oplus X_2$ and

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1D_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \; C = [C_1 \; D_1C_2], \; D = D_1D_2 \tag{1.9}$$

We have the following

Proposition 1.5. Let θ_1 and θ_2 be two nodes, and let θ_1^* and θ_2^* be their adjoint nodes. Then, we have the relation:

$$(\theta_1\theta_2)^* = S\theta_2^*\theta_1^*, \tag{1.10}$$

where $S: X_1 \oplus X \to X_2 \oplus X_1$ is the isomorphism:

$$x_1 \oplus x_2 \mapsto x_2 \oplus x_1, \text{ with } x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2.$$

Proof. Let us consider the product: $\theta = \theta_1\theta_2$. Then, its adjoint node is $\theta^* = (A^*, C^*, B^*, D^*;\ X = X_1 \oplus X_2,\ Y,\ U)$, with the operators:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ C_2^*B_1^* & A_2^* \end{bmatrix},\ B^* = [D_2^*B_1^*\ \ B_2^*],\ C^* = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^*D_1^* \end{bmatrix},\ D^* = D_2^*D_1^* \tag{1.11}$$

On the other hand, we have:

$$\theta_1^* = (A_1^*, C_1^*, B_1^*, D_1^*;\ X_1, Y, W),\ \theta_2^* = (A_2^*, C_2^*, B_2^*, D_2^*;\ X_2, W, U) \tag{1.12}$$

and it makes sense the product: $\theta = \theta_1\theta_2$, with

$$\theta' = (A', B', C', D';\ X' = X_2 + X_1,\ D,\ U), \text{ where:}$$

$$A' = \begin{bmatrix} A_2^* & C_2^*B_1^* \\ 0 & A_1^* \end{bmatrix},\ B' = \begin{bmatrix} C_2^*D_1^* \\ C_1^* \end{bmatrix},\ C' = [B_2^*D_2^*B_1^*],\ D' = D_2^*D_1^* \tag{1.13}$$

Let us remark that $D' = D^*$. Also, the space $X = X_1 \oplus X_2$ is isomorphic with the space $X' = X_2 \oplus X_1$ by the isomorphism $S: x = x_1 \oplus x_2 \mapsto x' = x_2 \oplus x_1$. Let $\pi: \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ be the permutation defined by: $\pi(1) = 2$ and $\pi(2) = 1$. Thus, $X' = X_{\pi(1)} \oplus X_{\pi(2)}$. We have the relation $\theta' = S\theta^*$, in the sense of the relations:

$$A' = SA^*,\quad B' = SC^*,\quad C' = SB^*,\quad D' = D^*. \tag{1.14}$$

Indeed, if $A = [A_{ij}]_{i,j=1,2}$ and $A' = [A'_{ij}]_{i,j=1,2}$, then, $A^* = [A_{ji}^*]_{i,j=1,2}$ and, by (1.13), $A' = [A^*_{\pi(j)\pi(i)}]_{i,j=1,2}$. Thus, $A'_{ij} = A^*_{\pi(j)\pi(i)}$, $i, j = 1, 2$. In the same way, if $C = [C_{1j}]_{j=1,2}$ and $B' = [B'_{i1}]_{i=1,2}$, we have: $B'_{i1} = C^*_{1\pi(i)}$, $i = 1, 2$. Also, if $B = [B_{i1}]_{i=1,2}$ and $C' = [C'_{1j}]_{j=1,2}$, we have: $C'_{1j} = B^*_{\pi(j)1}$, $j = 1, 2$. Q.E.D.

2. Let $\theta = (A, B, C, D;\ X, U, Y)$ be a node with invertible external operator D. The node $\theta^\times = (A^\times, B^\times, C^\times, D^\times;\ X, Y, U)$, with the operators:

$$A^\times = A - BD^{-1}C,\ B^\times = BD^{-1},\ C^\times = -D^{-1}C,\ D^\times = D^{-1}, \tag{2.1}$$

is called [1] the associate node of θ. The operator $A^\times$ is called the associate main operator of θ. We have the following:

Proposition 2.1. We have the node similarity:

$$(\theta^\times)^* \simeq (\theta^*)^\times \tag{2.2}$$

and the relation :

$$(A^{\times})^* = (A^*)^{\times}. \tag{2.3}$$

Proof. Because : $(\theta^{\times})^* = (A^* - C^*D^{*-1}B^*, -C^*D^{*-1}, D^{*-1}B^*, D^{*-1}; X, U, Y)$ and on the other hand : $(\theta^*)^{\times} = (A^* - C^*D^{*-1}B^*, C^*D^{*-1}, -D^{*-1}B^*, D^{*-1}; X, U, Y)$, it is clear that the relations (1.1) are satisfied for $(\theta^{\times})^*$ and $(\theta^*)^{\times}$ by the node similarity $S = -I$. The relation (2.3) results by calculation Q.E.D.

Let $\theta = (A, B, C, D; X, U, Y)$ be a node with invertible external operator D. In this, case, the operator $D : U \to Y$ is an isomorphism and, for implicity, we shall assume that : $U = Y$. Instead of $\theta = (A, B, C, D; X, Y, Y)$ we shall write $\theta = (A, B, C, D; X, Y)$. We know [1] the following :

Theorem A. Let $\theta = (A, B, C, D; X, Y)$ *be a node with invertible external operator* D, *let* π *be a projection of* X *and let* :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 C_2] \tag{2.4}$$

be the matrix representations of A, B *and* C *with respect to the decomposition* $X = \operatorname{Ker}\pi \oplus \operatorname{Im}\pi$. *Let us assume that* $D = D_1 D_2$, *where* D_1 *and* D_2 *are invertible operators on* D. *Let us write* :

$$\theta_1 = (A_{11}, B_1 D_2^{-1}, C_1, D_1; \operatorname{Ker}\pi, Y), \ \theta_2 = (A_{22}, B_2, D_1^{-1}C_2, D_2; \operatorname{Im}\pi, Y) \tag{2.5}$$

Then, $\theta = \theta_1\theta_2$ *if and only if*

$$A[\operatorname{Ker}\pi] \subset \operatorname{Ker}\pi, \qquad A^{\times}[\operatorname{Im}\pi] \subset \operatorname{Im}\pi. \tag{2.6}$$

For the adjoint nodes, we have the following :

Theorem 2.2. Let $\theta = (A, B, C, D; X, Y)$ *be a node with invertible external operator* D. *Let* $\theta^* = (A^*, C^*, B^*, D^*; X, Y)$ *by its adjoint node. Obviously,* $(D^*)^{-1} = (D^{-1})^*$. *Let* $\pi : X \to X$ *be a projection of the space* X. *Let us write* : $\pi_* = I - \pi$. *It is clear that* :

$$\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im}\pi_* \ \textit{and} \ \operatorname{Im}\pi = \operatorname{Ker}\pi_*. \tag{2.7}$$

Let the decompositions of the space X :

$$X = \operatorname{Ker}\pi \oplus \operatorname{Im}\pi = \operatorname{Im}\pi_* \oplus \operatorname{Ker}\pi_* \simeq \operatorname{Ker}\pi_* \oplus \operatorname{Im}\pi_* = \operatorname{Im}\pi \oplus \operatorname{Ker}\pi \tag{2.8}$$

be, where the isomorphism „$\simeq$" *is the map* $x_1 \oplus x_2 \mapsto x_2 \oplus x_1$.

To the matrix representations (2.4), *there corresponds the matrix representations* :

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}, \quad B^* = [B_1^* \quad B_2^*], \quad C^* = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

and $D^* = D_2^* D_1^*$. *Then,* $\theta^* \simeq \theta_2^* \theta_1^*$ *if and only if*

$$A^*[\operatorname{Ker} \pi_*] \subset \operatorname{Ker} \pi_*, \ (A^*)^\times [\operatorname{Im} \pi_*) \subset \operatorname{Im} \pi_*. \tag{2.10}$$

To give the proof of this theorem, we need a proposition.

A projection $\pi : X \to X$ is called [1] a supporting projection for the node θ, if there are satisfied the relations (2.6). We have the following :

Proposition 2.3. The projection π *is a supporting projection for the node* θ, *if and only if, the projection* $\pi_* = I - \pi$ *is a supporting projection for the adjoint node* θ^*.

Proof. We have to prove that the relations (2.6) are equivalent to the relations (2.10). But, we know, generally, for a decomposition : $Z = X \oplus Y$ of a complex Hilbert space Z in two orthogonal subspaces X and Y, and for a linear continuous operator $A : Z \to Z$, the fact that $AX \subset X$ if and only if $A^*Y \subset Y$. Thus, we have the equivalences :

$$A[\operatorname{Ker} \pi] \subset \operatorname{Ker} \pi \quad \text{if and only if} \quad A^*[\operatorname{Im} \pi] \subset \operatorname{Im} \pi ; \tag{2.11}$$

$$A^\times[\operatorname{Im} \pi] \subset \operatorname{Im} \pi \quad \text{if and only if} \quad (A^\times)^* [\operatorname{Ker} \pi] \subset \operatorname{Ker} \pi. \tag{2.12}$$

By the relations (2.7), the equivalences (2.11) and (2.12) mean the equivalence (2.6) with (2.10). Q.E.D.

Now, *the proof of the Theorem 2.2.* is immediate. We have, by virtue of the Theorem A, the Proposition 2.3 and the Proposition 1.5, that $\theta^* \simeq \theta_2^* \theta_1^*$ if and only if there exists the relations (2.10). Q.E.D.

We know [1], for the Theorem A, the following :

Corollary B. Let $\theta = (A, B, C, D ; X, Y)$ *be a node with an invertible external operator* D. *Let* W *be the transfer function of the node* θ. *Let* π *be a supporting projection of the node* θ. *We assume that* $D = D_1 D_2$, *where* D_1 *and* D_2 *are invertible operators on* Y. *Then, for* λ *is some open neighbourhood of* ∞, *we have :*

$$W(\lambda) = W_1(\lambda)\, W_2(\lambda), \ \textit{where} \tag{2.13}$$

$$W_1(\lambda) = D_1 + C(\lambda I - A)^{-1} \pi_* B D_2^{-1}, \ W_2(\lambda) = D_2 + D_1^{-1} C \pi (\lambda J - A)^{-1} B , \tag{2.14}$$

with $\pi_* = I - \pi$.

In the same way, the Theorem 2.2. admits the following :

Corollary 2.4. Let $\theta^* = (A^*, C^*, B^* , D^* ; X, Y)$ *be the adjoint node of the node* θ. *Assume that the external operator* D *is invertible. Let* W_* *be the transfer function of* θ^*. *Let* π_* *be a supporting projection for* θ^*. *Let* $D^* = D_2^* D_1^*$, *where* D_1^* *and* D_2^* *are invertible operators on* Y. *Then, for* λ *in some open neighbourhood of* ∞, *we have :*

$$W_*(\lambda) = W_{2*}(\lambda) W_{1*}(\lambda), \ \textit{where} \tag{2.15}$$

$$W_{1*}(\lambda) = D_1^* + D_2^{*-1} B^* \pi_* (\lambda I - A^*)^{-1} C^*,$$

$$W_{2*}(\lambda) = D_2^* + B^*(\lambda I - A^*)^{-1} \pi C^* D_1^{*-1}, \tag{2.16}$$

with $\pi = I - \pi_*$.

Proof. By virtue of the Corollary B and the Proposition 1.4, we have :

$$W_*(\lambda) = W_{\theta*}(\lambda) = [W_\theta(\overline{\lambda})]^* = [W_1(\overline{\lambda})W_2(\overline{\lambda})]^* = [W_2(\overline{\lambda})]^*[W_1(\overline{\lambda})]^* =$$

$$= W_{2*}(\lambda)W_{1*}(\lambda). \qquad \text{Q.E.S.}$$

3. Let, now, $\theta = (A, B, C, D; X, Y)$ be a node with the external operator $D = I$, the identity operator on the space Y. In this case, we write $\theta = (A, B, C,; X, Y)$ instead of $\theta = (A, B, C, I; X, Y)$.

Let π be a projection of the space X. With respect to the decomposition $X = \text{Ker}\,\pi \oplus \text{Im}\,\pi$, we write A, B and C in the matrix representations :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \; C_2]. \tag{3.1}$$

Assume that $I = D = D_1D_2$, with $D_1 = D_2 = I$. In this case, the nodes (2.5) take the form :

$$\theta_1 = (A_{11}, \; B_1, \; C_1; \text{Ker}\,\pi = \text{Im}\,\pi_*, Y),$$

$$\theta_2 = (A_{22}, B_2, C_2; \text{Im}\,\pi = \text{Ker}\,\pi_*, Y), \tag{3.2}$$

where $\pi_* = I - \pi$. We make the notations :

$$\text{pr}_\pi\theta = (A_{22}, B_2, C_2; \text{Im}\,\pi, Y), \; \text{pr}_{\pi_*}\theta = (A_{11}, B_1, C_1; \text{Im}\,\pi_*, Y) \tag{3.3}$$

and we call [3] these nodes the projections of θ associated with π and π_*, respectively. We have the following :

Proposition 3.1. We have the relations :

$$\text{pr}_\pi\theta^* = (\text{pr}_\pi\theta)^*, \quad \text{pr}_{\pi_*}\theta^* = (\text{pr}_{\pi_*}\theta)^*. \tag{3.4}$$

Proof. Let us consider the node $\theta = (A, B, C; X, Y)$ and its adjoint node $\theta^* = (A^*, C^*, B^*; X, Y)$. By (2.4), we have :

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}, \quad B^* = [B_1^* B_2^*], \quad C^* = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Therefore, by the definition relations (3.3), it follows :

$$\text{pr}_\pi\theta^* = (A_{22}^*, C_2^*, B_2^*; \text{Im}\,\pi, Y) = (\text{pr}_\pi\theta)^* \text{ and} \tag{3.6}$$

$$\text{pr}_{\pi_*}\theta^* = (A_{11}^*, C_1^*, B_1^*; \text{Im}\,\pi_*, Y) = (\text{pr}_{\pi_*}\theta)^*. \quad \text{Q.E.D.} \tag{3.7}$$

We have [1]:

Proposition C. Let $\theta = (A, B, C; X, Y)$ *be a node, and let* $\theta^\times = (A - BC, B, -C; X, Y)$ *be its associate node. Then, we have the relation:*

$$\mathrm{pr}_\pi \theta^\times = (\mathrm{pr}_\pi \theta)^\times \tag{3.8}$$

Our proof. By the expression of $\theta^\times$ and the matrix representations (2.4), we have the operator:

$$A^\times = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 C_1 & A_{12} - B_1 C_2 \\ A_{21} - B_2 C_1 & A_{22} - B_2 C_2 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Therefore, we have:

$$\mathrm{pr}_\pi \theta^\times = (A_{22} - B_2 C_2,\ B_2,\ C_2;\ \mathrm{Im}\ \pi,\ Y) \tag{3.10}$$

By the relations (3.3) and the expression of the associate node, we have too:

$$(\mathrm{pr}_\pi \theta)^\times = (A_{22} - B_2 C_2,\ B_2, C_2;\ \mathrm{Im}\ \pi, Y) \tag{3.11}$$

From (3.10) and (3.11) we obtain (3.8). Q.E.D.

We have the following:

Proposition 3.2. There exists the node similarity:

$$\mathrm{pr}_\pi(\theta^*)^\times \simeq \mathrm{pr}_\pi(\theta^\times)^*. \tag{3.12}$$

Proof. We make use of the Proposition C, the Proposition 3.1, the Proposition 2.1, again the Proposition 3.1, to obtain:

$$\mathrm{pr}_\pi(\theta^*)^\times = (\mathrm{pr}_\pi \theta^*)^\times = [(\mathrm{pr}_\pi \theta)^*]^\times \simeq [(\mathrm{pr}_\pi \theta)^\times]^* = (\mathrm{pr}_\pi \theta^\times)^* = \mathrm{pr}_\pi(\theta^\times)^*. \tag{3.13}$$

Q.E.D.

We know the following [1]:

Theorem D. Let $\theta = (A, B, C; X, Y)$ *be a node, and let* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ *be mutually disjoint projections of* X *such that* $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = I_X$ *the identity operator on* X. *Then,*

$$\theta = \mathrm{pr}_{\pi_1}(\theta)\, \mathrm{pr}_{\pi_2}(\theta) \ldots \mathrm{pr}_{\pi_n}(\theta) \tag{3.14}$$

if and only if $\pi_{j+1} + \ldots + \pi_n$ *is a supporting projection for* θ, *for* $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

For the adjoint nodes, we have the following:

Theorem 3.3. Let $\theta^* = (A^*, C^*, B^*; X, Y)$ *be the adjoint node of* $\theta = (A, B, C; X, Y)$ *and let* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ *be mutually disjoint projections of* X *such that* $\pi_1 + \ldots + \pi_n = I_X$. *Then,*

$$\theta^* \simeq \mathrm{pr}_{\pi_n}(\theta^*)\, \mathrm{pr}_{\pi_{n-1}}(\theta^*) \ldots \mathrm{pr}_{\pi_1}(\theta^*), \tag{3.15}$$

if and only if $\pi_1 + \ldots + \pi_j$ *is a supporting projection for* θ^* *for* $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Proof. Let us name the projections : $\pi = \pi_{j+1} + \ldots + \pi_n$ and $\pi_* = I - \pi = \pi_1 + \ldots + \pi_j$. By virtue of the Proposition 2.3, π is a supporting projection for θ, if and only if, π_* is a supporting projection for θ^*. On the other hand, by virtue of the Theorem *D* and the Proposition 1.5, extended by complete induction, and the Proposition 3.1, we have :

$$\theta^* \simeq [\mathrm{pr}_{\pi_n}(\theta)]^* \ldots [\mathrm{pr}_{\pi_2}(\theta)]^* [\mathrm{pr}_{\pi_1}(\theta)]^* = \mathrm{pr}_{\pi_n}(\theta^*) \ldots \mathrm{pr}_{\pi_2}(\theta^*)\, \mathrm{pr}_{\pi_1}(\theta^*).$$

Q.E.D. (3.16)

We have the following :

Corollary 3.4. (For the case $n = 2$). *The projection π is a supporting projection for the node θ, if and only if,*

$$\text{(i) } \theta = (\mathrm{pr}_{\pi_*}\theta)(\mathrm{pr}_{\pi}\theta)\,; \textit{ equivalently, } \text{(ii) } \theta^* \simeq (\mathrm{pr}_{\pi}\theta^*)\,(\mathrm{pr}_{\pi^*}\theta^*), \quad (3.17)$$

where, $\pi_* = I - \pi$.

4. Let us consider the Riemann sphere $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A function $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, defined by the expression :

$$\varphi(\lambda) = \frac{p\lambda + q}{r\lambda + s}, \quad (4.1)$$

where p, r, q, s are complex numbers and the determinant $\Delta = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr \neq 0$, is called [1] a Möbius transformation. It is known [1] the following :

Theorem E. Let $\theta = (A, B, C, D\,;\, X, Y)$ be a node with the transfer function W_θ. Let φ be a Möbius transformation. Let us assume that the operator $T = pI - rA$ is invertible. Then, the function $W_\varphi(\lambda) = W_\theta(\varphi(\lambda))$ is the transfer function of the node :

$$\theta_\varphi = -(qI - sA)T^{-1},\ T^{-1}B,(ps - qr)\,CT^{-1},\ D + rCT^{-1}B\,;\, X, Y)\,; \quad (4.2)$$

therefore,

$$W_{\theta_\varphi}(\lambda) = W_\varphi(\lambda).$$

Thus, to a node $\theta = (A, B, C, D\,;\, X, Y)$ and a Möbius transformation φ, we associated the node θ_φ, in the condition concerning the transfer functions :

$$W_{\theta_\varphi}(\lambda) = W_\theta(\varphi(\lambda)). \quad (4.3)$$

Let us consider the conjugate expression of (4.1), namely :

$$\overline{\varphi}(\overline{\lambda}) = \overline{\varphi(\lambda)} = \frac{\overline{p}\,\overline{\lambda} + \overline{q}}{\overline{r}\,\overline{\lambda} + \overline{s}}, \quad (4.4)$$

where we denoted the function

$$\overline{\varphi}(\overline{\lambda}) = \frac{\overline{p}\lambda + \overline{q}}{\overline{r}\lambda + \overline{s}}, \quad (4.5)$$

with the determinant

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{p} & \bar{q} \\ \bar{r} & \bar{s} \end{vmatrix} = \bar{p}\bar{s} - \bar{q}\bar{r} \neq 0.$$

We have the following :

Theorem 3.1. Let $\theta = (A, B, C, D; X, Y)$ *be a node with the adjoint node* θ^*. *Let* φ *be a Möbius transformation with the conjugate transformation* $\bar{\varphi}$. *Then,*

$$(\theta_\varphi)^* \simeq (\theta^*)_{\bar{\varphi}}, \tag{4.6}$$

by the node similarity : $S = \bar{\Delta}^{-1}I$.

Proof. By (4.2) and the Definition 1.1., we have the node $(\theta_\varphi)^* = (A_1, B_1, C_1, D_1; X, Y)$, with the operators :

$$\begin{cases} A_1 = -T^{*-1}(\bar{q}I - \bar{s}A^*), & B_1 = (\bar{p}\bar{s} - \bar{q}\bar{r})\, T^{*-1}C^*, \\ C = B^*T^{*-1} \quad , & D_1 = D^* + \bar{r}B^*T^{*-1}C^*. \end{cases} \tag{4.7}$$

We have : $T = pI - rA$; therefore, $A = \dfrac{1}{r}(pI - T)$, with $A^* = \dfrac{1}{\bar{r}}(\bar{p}I - T^*)$ and $T^* = \bar{p}I - \bar{r}A^*$. Thus, when we are passing from the node θ to the adjoint node θ^*, we use A^* instead of A, and T^* instead of T. By the Definition 1.1., the relations (4.5) and (4.2), we have the node $(\theta^*)_{\bar{\varphi}} = (A_2, B_2, C_2, D_2; X, Y)$, with the operators :

$$\begin{cases} A_2 = -(\bar{q}I - \bar{s}A^*)T^{*-1}, & B_2 = T^{*-1}C^*, \\ C_2 = (\bar{p}\bar{s} - \bar{q}\bar{r})B^*T^{*-1}, & D_2 = D^* + \bar{r}B^*T^{*-1}C^*. \end{cases} \tag{4.8}$$

Let us verify the relations (1.1). We have : $TA = AT$, because $T = pI - rA$. Therefore, we have :

$$T(qI - sA) = (qI - sA)T \text{ and } [(qI - sA)T^{-1}]^* = [T^{-1}(qI - sA)]^*. \tag{4.9}$$

Thus, we obtained :

$$SA_1 = -(\bar{\Delta}^{-1}I)T^{*-1}(\bar{q}I - \bar{s}A^*) = -(\bar{q}I - \bar{s}A^*)\, T^{*-1}(\bar{\Delta}^{-1}I) = A_2S. \tag{4.10}$$

We have, also :

$$B_2 = T^{*-1}C^* = (\bar{\Delta}^{-1}I)\, \bar{\Delta}T^{*-1}C^* = SB_1, \tag{4.11}$$

$$C_1 = B^*T^{*-1} = \bar{\Delta}B^*T^{*-1}(\bar{\Delta}^{-1}I) = C_2S. \tag{4.12}$$

Thus, we obtained the node similarity (4.6). Q.E.D.

We have the following :

Theorem 4.2. Let $\theta = (A, B, C, D; X, Y)$ *be a node with the transfer function* W_θ. *Let* θ^* *be the adjoint node of* θ. *Let* φ *be a Möbius transformation with the conjugate transformation* $\overline{\varphi}$. *Let us assume that the operator* $T = pI - rA$ *is invertible. Then the function*:

$$W_{\overline{\varphi}}(\lambda) = W_{\theta^*}(\overline{\varphi}(\lambda)) \tag{4.13}$$

is the transfer function of the node $(\theta_\varphi)^*$, *Thus, we have the relation*:

$$W_{(\theta_\varphi)^*}(\lambda) = W_{\theta^*}(\overline{\varphi}(\lambda)). \tag{4.14}$$

Proof. Because similar nodes have the same transfer function, we obtain, by (4.6) and (4.3), that:

$$W_{(\theta_\varphi)^*}(\lambda) = W_{(\theta^*)_{\overline{\varphi}}}(\lambda) = W_{\theta^*}(\overline{\varphi}(\lambda)) \tag{4.15}$$

Q.E.D.

5. Let us remark that there exists a connection between the operator nodes' theory and the linear systems' theory, with applications to the electrical networks' study [4].

REFERENCES

1. *H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek*, Minimal factorization of matrix and operator functions, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 1 Birkhäuser Verlag, Basel, 1979.
2. *H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek, P. van Dooren*, Siam J. Control and Optimization, 18, 6 (1980), 675–696.
3. *M. S. Brodskii*, Triangular and Jordan representations of linear operators, Transl. Math Monographs, vol. 32, Providence R. I. Amer. Math. Soc., 1970.
4. *E. Deciu*, Buletin I.P.B., Seria Automatică, TOM XLV, 1983, 12–18.
5. *J. W. Helton*, J. Functional Analysis, 16 (1974), 15–38.

Asupra unor proprietăți ale nodurilor operatoriale adjuncte pe spații Hilbert complexe

In [1] este dată noțiunea de nod operatorial în contextul spațiilor Banach complexe. O utilizăm în contextul spațiilor Hilbert complexe. Acest context permite să introducem[4] noțiunea de nod adjunct. Studiem multiplicarea, divizibilitatea și transformările Möbius pentru noduri adjuncte.

CZ: 519.217.2
519.688

PRELUCRAREA PE CALCULATOR A UNUI ALGORITM DE DETERMINARE A SUBCLASELOR UNEI CLASE DE STĂRI A UNUI LANŢ MARKOV

SILVIA BONTAŞ*

În lucrare se prezintă un algoritm de determinare a perioadei şi subclaselor unei clase închise a unui lanţ Markov finit şi omogen, exemplificîndu-se pe un caz numeric şi se dă un program elaborat pe calculator pentru aplicarea algoritmului. Împărţirea în subclase a unei clase de stări a unui lanţ Markov determină o formă particulară a matricei de trecere a lanţului, care permite predicţia puterilor sale şi deci, precizarea evoluţiei lanţului la momente nesuccesive.

1. Introducere

Probabilităţile de trecere ale unui lanţ Markov, notate p_{ij}, „măsoară" schimbările de stare la momente succesive, într-un singur pas. Probabilităţile de trecere în n paşi, notate p_{ij}^{n}, „măsoară" schimbările de stare în n paşi şi sînt elementele puterii $a\,n-a\,a$ matricei de trecere a lanţului, notată P. Deci probabilităţile apariţiei unei stări la momente nesuccesive pot fi calculate cu ajutorul probabilităţilor de trecere şi a celor iniţiale, ceea ce permite cunoaşterea structurii complete a evoluţiei în timp a unui sistem markovian („fără memorie").

Se demonstrează (de exemplu [1]) că trecerea dintr-o stare în alta în cadrul unei clase a unui lanţ Markov nu se face la întîmplare, ci în funcţie de perioada şi subclasele clasei considerate, ceea ce determină o structură particulară a matricei de trecere şi a puterilor sale, care interesează în studiul lanţurilor Markov.

Lucrarea prezintă un algoritm de determinare a perioadei şi subclaselor unei clase închise a unui lanţ Markov finit şi omogen ([2]) şi se dă un program elaborat pe calculator pentru aplicarea algoritmului.

2. Rezultate teoretice utilizate

Fie $\{Xn\}_{n\in\mathbb{N}}$ un lanţ Markov finit şi omogen, cu mulţimea de stări S. Se spune că din starea i se *trece* în starea j sau că starea j este *accesibilă* din starea i şi se notează $i \to j$, dacă din i se poate ajunge în j într-un număr finit de paşi (i..e există $n\in\mathbb{N}$ astfel încît $p_{ij}^{(n)} > 0$). Se spune că starea i *comunică* cu starea j şi se notează $i \to j$, dacă $i \to j$ şi $j \to i$. Relaţia de comunicare este simetrică şi tranzitivă, dar nu este reflexivă (pot exista stări care nu comunică cu ele însele). Stările unui

* Asist., catedra Matematici I

lanț Markov se pot grupa în clase după criteriul comunicării, astfel: două stări care comunică între ele aparțin aceleiași clase; o stare care nu comunică cu nici o altă stare formează o clasă. Evident două clase distincte nu pot avea în comun nici un element. Se spune că o casă de stări C, $C - S$, este *închisă* dacă $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1$ pentru orice $i \in C$. Intuitiv, o clasă închisă este o clasă care nu mai poate fi părăsită odată ce s-a intrat în ea sau, în limbaj de grafuri, stările unei clase închise sînt nodurile unei componente conexe a grafului Markov asociat lanțului.

O proprietate definită pe mulțimea stărilor se numește *proprietate de clasă* dacă îndeplinirea sa de către o stare a unei clase implică îndeplinirea sa de către toate stările clasei respective. Evident negația unei proprietăți de clasă este tot o proprietate de clasă. Rezultă că între elementele unei clase există o foarte strînsă legătură.

Fie i o stare oarecare a lanțului Markov cu proprietatea că se poate reveni în ea după un număr finit de pași (i.e. există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $p_{ii}^{(n)} > 0$). Se definește *perioada stării* i, notată d_i, cel mai mare divizor comun al valorilor $m \in \mathbb{N}$ pentru care $p_{ii}^{(m)} > 0$. Se spune că starea i este *periodică* sau *aperiodică* după cum $d_i > 1$, respectiv $d_i = 1$. Două stări distincte aparținînd aceleiași clase au aceeași perioadă, deci proprietatea unei stări de a avea perioadă este o proprietate de clasă și în consecință se poate vorbi de *perioada unei clase*.

Fie C o clasă închisă periodică, de perioadă d și $i \in C$ o stare fixată. Clasa C se împarte în subclase astfel:

$$C_b = \{j \in C \mid \text{există } n \in \mathbb{N} \text{ a.î. } p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ implică } n \equiv b (\mathrm{mod}\ d)\}$$

pentru orice b, $0 \leqslant b \leqslant d - 1$. Evident subclasele $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ sînt disjuncte și reuniunea lor este chiar C, deci constituie o partiție a clasei C.

Are loc următorul rezultat:

Dacă $k \in C_b$ și $p_{kj} > 0$, atunci $j \in C_{b+1}$ cu indicii reduși modulo d (i.e. $C_d = C_0$, $C_{d+1} = C_1$, etc.). Deci, în cadrul unei clase nu se trece la întîmplare dintr-o subclasă în alta, ci în cea de indice imediat superior.

Rezultă că matricea de trecere a unui lanț Markov a cărui mulțime de stări formează o singură clasă închisă de perioadă d, $d > 1$, are forma

$$P = \begin{array}{c} \\ C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ \\ \\ C_{d-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_0 & C_1 & \ldots & & & C_{d-1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} O & X & & & & \\ O & O & X & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & X \\ X & O & & & & O \end{array}\right] \end{array}$$

unde semnul X indică matrice stochastice, în general dreptunghiulare. Se poate de asemenea prevedea forma puterilor matricei de trecere P;

în particular

$$P^d = \begin{array}{c} \\ C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ \\ C_{d-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_0 & C_1 & \dots & C_{d-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} X & & & \\ & X & O & \\ & & \ddots & \\ O & & & \\ & & & X \end{bmatrix} \end{array}$$

Rezultă că pentru orice m, $n \in \mathbb{N}$, orice b, $0 \leqslant b \leqslant d-1$, și orice $k \in C_b$

$$P(X_{m+n} \in C_{b+n} \mid X_m = k) = 1.$$

3. Algoritm pentru determinarea perioadei și subclaselor unei clase închise

Pentru a urmări procedeul efectiv de determinare a perioadei și subclaselor unei clase închise vom considera un exemplu concret. Fie lanțul Markov care are asociată matricea de trecere:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Graful Markov asociat este

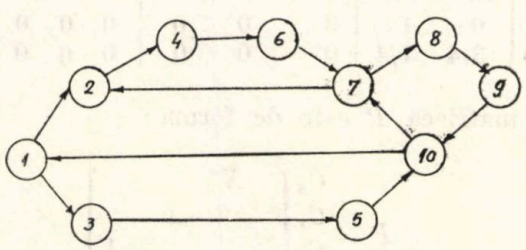


Fig. 1

Urmărind graful observăm că toate stările comunică între ele, deci mulțimea stărilor formează o singură clasă închisă. Alegem o stare, de exemplu 1 și fie C_0 subclasa care o conține. Toate stările accesibile într-un singur pas din starea 1 vor aparține subclasei C_1, toate stările accesibile într-un singur pas din stările subclasei C_1 vor aparține subclasei C_2 și așa mai departe, pînă cînd reapare o stare întîlnită anterior. Dacă două subclase au un element comun, atunci ele coincid. Se reia procedeul considerînd subclasa C_0 reuniunea subcaselor ce au în comun cel puțin o stare. Algoritmul se încheie în momentul în care apare o subclasă identică cu C_0, numărul total de subclase obținute pînă la apariția subclasei cu această proprietate constituind perioada clasei considerate.

Pentru exemplul considerat, construim următorul tabel:

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
1	2,3	4,5	6,10	1,7

Deoarece $1 \in C_0 \cap C_4$ înseamnă că $C_0 \equiv C_4$. Construim un nou tabel, considerînd $C_0 = \{1,7\}$:

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
1,7	2,3,8	4,5,9	6,10	1,7

Deoarece $C_0 \equiv C_4$ rezultă că perioada $d = 4$ subclasele de stări fiind $C_0 = \{1,7\}$, $C_1 = \{2,3,8\}$, $C_2 = \{4,5,9\}$ și $C_3 = \{6,10\}$. Matricea de trecere P se poate scrie sub forma:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 8 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 9 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 6 & 10 \end{array} \\ \left.\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Deci, simbolic, matricea P este de forma:

$$P = \begin{array}{c} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & X & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} & & X & \\ & & & X \\ X & & & \end{array}\right] \end{array}$$

iar puterile sale vor fi de forma :

$$P^2 = \begin{matrix} C_0 \\ C_1 \\ C_1 \\ C_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} & & X & \\ & & & X \\ X & & & \\ & X & & \end{bmatrix}; \quad P^3 = \begin{matrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} & & & X \\ X & & & \\ & X & & \\ & & X & \end{bmatrix};$$

$$P^4 = \begin{matrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} X & & & \\ & X & & \\ & & X & \\ & & & X \end{bmatrix}.$$

Conform ultimei observații de la paragraful 2, de exemplu pentru $m = 15$, $n = 3$, $b = 2$ și $9 \in C_2$ avem $X_{15+3} \in C_{2+3} = C_1 = \{2, 3, 8\}$ (cu indicele redus modulo 4), deci dacă la momentul 15 lanțul s-a aflat în starea 9, atunci cu siguranță la momentul 18 lanțul se va afla într-una din stările subclasei $C_1 = \{2,3,8\}$ și nu într-o altă stare a clasei C (se poate verifica cu ușurință pe graf).

4. Programul PERCLAS

Programul PERCLAS transpune pe calculator algoritmul prezentat

Datele de intrare sînt :

NR — numărul de stări ale lanțului

$P = (p_{ij})$ — matricea de trecere a lanțului

Matricea de trecere este dimensionată (20,20), cu posibilitatea măririi cu ușurință a acestei dimensiuni.

Programul PERCLAS afișează matricea de trecere, subclasele determinate la fiecare pas, iar în momentul în care s-au determinat două subclase identice, perioada clasei analizate. În cazul în care clasa este aperiodică, se afișează mesajul corespunzător.

Se utilizează următoarele cîmpuri de lucru :

C (20,20) — matrice care conține pe linii elementele subclaselor

V_1 (40) — vector în care se introduc, la fiecare pas al iterației, stările obținute, în ordinea dată de analiză.

V_2 (40) — vector în care se introduce, la fiecare pas al iterației, numărul de ordine al subclasei din care fac parte stările introduse în vectorul V_1

M_2 (20) — vector care conține, la fiecare pas al iterației, ultima subclasă determinată, deci linia curentă din matricea C

M_1 (20) — vector care conține, la fiecare pas al iterației, subclasa care, la rîndul ei, conține una din stările ce se află și în subcalsa analizată

IPAS — număr întreg pozitiv care reprezintă pasul curent al iterației

Structura programului este următoarea :

Se citesc datele de intrare și se afișează matricea de trecere P.

— Se alege subclasa inițială formată numai din starea 1.

Se determină subclasele clasei date în următoarele etape:

— se determină stările care aparțin unei subclase astfel: o stare j va aparține subclasei considerate, dacă există o stare i în subclasa de indice imediat inferior, astfel încît probabilitatea de trecere de la i la j este nenulă;

— se determină stările care se repetă în subclasa obținută:

— se memorează, în ordinea analizei, stările subclasei obținute și numărul de ordine al subclasei în vectorii V_1 și respectiv V_2;

— se verifică dacă subclasa curentă conține vreuna din stările subclaselor determinate la pașii anteriori.

În caz negativ, se trece la determinarea unei noi subclase.

În caz afirmativ, programul afișează subclasele determinate la iterația respectivă după care se reunesc cele două subclase care au unele stări comune, utilizîndu-se în acest scop vectorii de lucru M_1 și M_2.

Se compară reuniunea celor două subclase cu subclasa inițială la iterația respectivă.

Dacă acestea nu coincid, se consideră subclasă inițială reuniunea celor două subclase și se trece la o nouă iterație.

Dacă acestea coincid, înseamnă că algoritmul s-a încheiat. Programul numără subclasele determinate pînă la momentul coincidenței și afișează ND, perioada clasei.

Pentru testarea programului s-au folosit datele din exemplul prezentat în paragraful 3.

BIBLIOGRAFIE

[1] *K. L. Chung*, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Berlin, Springer, 1967.

[2] *M. Iosifescu*, Lanțuri Markov finite și aplicații, Ed. Tehnică, 1977.

[3] *C. Târcolea, A. Paris*, Considerații privind fiabilitatea unui sistem de mașini-unelte în serie și serie-paralel, cu măsuri de reducere a pierderilor de productivitate, A IV-a Conferință națională de mașini unelte, IPB, București, aprilie 1982.

An Algorithm for Establishing the] Period and the Subclasses of a Markov Chain Class

An algorithm for establishing the period and the subclasses of a finit homogeneous Markov chain closed class is presented, a numerical example and an application of this algorithm to computer programming are given. The partition of a Markov chain states class imposes a particular form of the chain's transition matrix, thus allowing the predition of its exponents and therefore the description of chain's evolution at unsuccesive times.

C.Z.: 512.53

ASUPRA MULȚIMILOR ÎNCHISE ALE UNUI MATROID

D. MARCU*

În lucrarea de față sînt prezentate cîteva rezultate (în continuarea celor din [2]) privind mulțimile închise ale unui matroid.

Considerații preliminare

Noțiunile, notațiile și rezultatele referitoare la teoria matroizilor și utilizate în cadrul prezentului articol sînt cele din [3, 4]. Relativ la elementele de teoria laticilor am avut în vedere [1].

Fie E o mulțime finită, $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale $\mathscr{P}(E)$ mulțimea părților lui E și $r : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{N}$ astfel încît :

(1) $r(S) \leqslant |S|$, pentru orice $S \subseteq E$,

(2) dacă $X \subseteq Y \subseteq E$, atunci $r(X) \leqslant r(Y)$,

(3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leqslant r(X) + r(Y)$, pentru orice $X, Y \subseteq E$.

Perechea $M := M(E, r)$, unde r verifică (1)—(3), se numește *matroid* peste E, iar r *funcția rang* a lui M.
Ca o consecință imediată (e.g., vezi [4], pag. 16) a relațiilor (1) — (3) avem :

(4) $r(S) \leqslant r(S \cup \{e\}) \leqslant r(S) + 1$, pentru orice $S \subseteq E$ și $e \in E$.

O mulțime $S \subseteq E$, pentru care $r(S) = |S|$ se numește *independentă*, iar o mulțime independentă maximală se numește *bază*. Dacă $B \subseteq E$ este o bază, atunci $B^* = E - B$ este o *cobază* a matroidului M. Matroidul peste E ale cărui baze sînt cobazele lui M se numește *matroidul dual* corespunzător lui M și va fi notat prin M^*. Dacă r^* este funcția rang a lui M^*, atunci este verificată relația :

(5) $r^*(S) = |S| - r(E) + r(E - S)$, pentru orice $S \subseteq E$.

* Cercetător, Universitatea București

Fie $S \subseteq E$. Numim *închidere* a lui S, mulțimea

$$(6)\quad \bar{S} = \{e \in E : r(S \cup \{e\}) = r(S)\},$$

iar despre S spunem că este *închisă* dacă $S = \bar{S}$.

Pentru matroidul dual închiderea unei mulțimi $S \subseteq E$ va fi notată $\bar{S}$. Evident, (e.g., vezi [3], pag. 15),pentru orice $S \subseteq E$ avem :

$$(7)\quad S \subseteq \bar{S},$$
$$(8)\quad r(S) = r(\bar{S}).$$

De asemenea (e.g., vezi [4], pag. 21), pentru orice $S \subseteq E$ avem :

$$(9)\quad S = \bar{S} \leftrightarrow r(S \cup \{e\}) = r(S) + 1, \text{ pentru orice } e \in E - S.$$

Dacă notăm $\mathscr{L}(M) = \{S \subseteq E : S = \bar{S}\}$, atunci, conform [4, pag. 48], $[\mathscr{L}(M), \subseteq]$ este o latice. Analog, prin dualitate, $[\mathscr{L}(M^*), \subseteq]$ este o latice. În cele ce urmează vom considera mulțimile $\mathscr{E}(M) = \{S \subseteq E : S = \bar{S}$ și $r(S - \{e\}) = r(S)$, pentru orice $e \in S\}$ și $\mathscr{E}(M^*) = \{S \subseteq E : S = \overset{*}{S}$ și $r^*(S - \{e\}) = r^*(S)$, pentru orice $e \in S\}$, iar pentru $X, Y \subseteq E$ definim $\alpha(X, Y) = |X| - |Y| - r(X) + r(Y)$.

• Rezultatele principale

Lema 1. *Fie.* $X, Y \subseteq E$. *Dacă* $Y \subseteq X$, *atunci* $\alpha(X, Y) \geqslant 0$.

Demonstrație. Evident, dacă $X = Y$. Fie deci $Y \subset X$. Aplicînd succesiv (de $|X - Y|$ ori) relația (4), obținem $r[Y \cup (X - Y)] \leqslant (rY) + |X - Y|$, i.e., $r(X) \leqslant r(Y) + |X| - |Y|$, și deci $\alpha(X, Y) \geqslant 0$. (Q.E.D.)

Lema 2. *Dacă* $X, Y, Z \subseteq E$, *atunci* $\alpha(X, Y) = \alpha(X, Z) + \alpha(Z, Y)$.

Demonstrație. Rezultă imediat din definiția lui α. (Q.E.D.)

Lema 3. *Dacă* $X, Y, \subseteq E$, *atunci* $\alpha(X \cup Y, X) + \alpha(X \cup Y, Y) \geqslant \alpha(X \cup Y, X \cap Y)$.

Demonstrație. Rezultă printr-un calcul simplu aplicînd (3). (Q.E.D.)

Lema 4. *Dacă* $X, Y \subseteq E$, a*atunci* $\alpha(X \cup Y, X \cap Y) \geqslant \alpha(X, X \cap Y) + \alpha(Y, X \cap Y)$.

Demonstrație. Rezultă printr-un calcul simplu aplicînd (3). (Q.E.D.)

Corolarul 1. *Dacă* $X, Y \subseteq E$ *atunci* $\alpha(X \cup Y, X) + \alpha(X \cup Y, Y) \geqslant \alpha(X, X \cap Y) + \alpha(Y, X \cap Y)$.

Demonstrație. Rezultă imediat din lemele 3 și 4. (Q.E.D.)

Corolarul 2. *Fie* $X, Y \subseteq E$. *Dacă* $\alpha(X \cup Y, X) = 0$, *atunci* $\alpha(Y, X \cap Y) = 0$.

Demonstrație. Conform lemei 2 avem $\alpha(X \cup Y, X \cap Y) = \alpha(X \cup Y, X) + \alpha(X, X \cap Y)$ și $\alpha(X \cup Y, X \cap Y) = \alpha(X \cup Y, Y) + \alpha(Y, X \cap Y)$, i.e., $\alpha(X \cup Y, X) + \alpha(X, X \cap Y) = \alpha(X \cup Y, Y) + \alpha(Y, X \cap Y)$. Prin urmare, conform ipotezei, obținem $\alpha(X, X \cap Y) = \alpha(X \cup Y, Y) + \alpha(Y, X \cap Y)$. Pe de altă parte, conform corolarului 1,

rezultă $\alpha(X \cup Y, Y) \geqslant \alpha(X, X \cap Y) + \alpha(Y, X \cap Y)$. Deci $\alpha(X, X \cap Y) \geqslant \alpha(X, X \cap Y) + 2\alpha(Y, X \cap Y)$, i.e., $\alpha(Y, X \cap Y) \leqslant 0$, iar conform lemei 1 (deoarece $X \cap Y \subseteq Y$) avem $\alpha(Y, X \cap Y) = 0$. (Q.E.D.)

Lema 5. *Fie* $X, Y \subseteq E$ *astfel încît* $Y \subseteq X$ *și* $r(Y) = r(X) - 1$. *Dacă* $r(X - \{x\}) = r(X)$ *pentru orice* $x \in X$, *atunci* $|X| - |Y| > 1$.

Demonstrație. Presupunem $|X| - |Y| \leqslant 1$. Dacă $|X| - |Y| = 0$, atunci $X = Y$ și $r(X) = r(Y)$, i.e., contradicție cu ipoteza. Dacă $|X| - |Y| = 1$, atunci există $x_0 \in X - Y$ astfel încît $X = Y \cup \{x_0\}$. Dar conform ipotezei, $r(Y) = r(X - \{x_0\}) = r(X) = r(Y) + 1$, i.e., contradicție și lema este deci demonstrată. (Q.E.D.)

Corolarul 3. *Fie* $X, Y \subseteq E$ *astfel încît* $Y \subseteq X$ *și* $r(Y) = r(X) - 1$. *Dacă* $r(X - \{x\}) = r(X)$ *pentru orice* $x \in X$, *atunci* $\alpha(X, Y) > 0$.

Demonstrație. Rezultă imediat din lema precedentă și definiția lui α. (Q.E.D.)

Lema 6. *Dacă* $X, Y \subseteq E$ *astfel încît* $Y = \bar{Y}$ *și* $Y \subset X$, *atunci* $r(Y) \leqslant r(X) - 1$.

Demonstrație. Conform (2) avem $r(Y) \leqslant r(X)$. Presupunem $r(Y) = r(X)$ și fie $x_0 \in X - Y$ ales arbitrar. Deoarece $Y \cup \{x_0\} \subseteq X$, conform (2), avem $r(Y) \leqslant r(Y \cup \{x_0\}) \leqslant r(X) = r(Y)$, i.e., $r(Y \cup \{x_0\}) = r(Y)$. Deci $x_0 \in Y = Y$: contradicție. Prin urmare, $r(Y) < r(X)$, i.e., $r(Y) \leqslant r(X) - 1$. (Q.E.D.)

Teorema 1 [2]. *Dacă* $X, Y \subseteq E$ *astfel încît* $X = \overline{X}$, $Y = \bar{Y}$ *și* $Y \subset X$, *atunci pentru orice* $x \in X - Y$ *există* $Z(x) \subseteq E$ *cu*:

(a) $x \in Z(x)$,

(b) $Y \subset Z(x)$,

(c) $\overline{Z(x)} = Z(x)$.

(d) $r[Z(x)] = r(Y) + 1$.

Teorema 2. *Fie* $X \subseteq E$ *astfel încît* $X = \bar{X}$. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

(a) *pentru orice* $Y \subseteq E$ *cu* $Y = \bar{Y}$ *și* $Y \subset X$ *are loc* $\alpha(X, Y) \neq 0$,

(b) $X \in \mathscr{E}(M)$.

Demonstrație. [(a) implică (b)]. Presupunem că $X \notin \mathscr{E}(M)$, i.e., există $x_0 \in X$, astfel încît $r(X - \{x_0\}) \neq r(X)$ și fie $Y = X - \{x_0\}$. Dacă $x_0 \in \bar{Y}$ atunci, conform (6), $r(Y \cup \{x_0\}) = r(Y)$, i.e., $r(X) = r(X - \{x_0\})$; contradicție, și deci $x_0 \notin Y$. Fie $y \in Y$ ales arbitrar. Cum $x_0 \notin \bar{Y}$ și $\bar{Y} \subseteq \bar{X} = X$, rezultă că $y \in X - \{x_0\}$, i.e., $\bar{Y} \subseteq Y$. Prin urmare, conform (7), avem $Y = \bar{Y}$ și $Y \subset X$, iar prin aplicarea lemei 6 obținem $r(Y) \leqslant r(X) - 1$, i.e., $\alpha(X, Y) \leqslant 0$. Pe de altă parte, conform lemei 1, avem $\alpha(X, Y) \geqslant 0$. Deci $\alpha(X, Y) = 0$; contradicție cu ipoteza, și prin urmare $X \in \mathscr{E}(M)$. (Q.E.D.)

(b) implică (a)]. Fie $Y \subseteq E$ astfel încît $Y = \bar{Y}$ și $Y \subset X$. Conform lemei 6 avem $r(Y) \leqslant r(X) - 1$. Dacă $r(Y) = r(X) - 1$, atunci $\alpha(X, Y) \neq 0$, conform corolarului 3. Presupunem deci $r(Y) < r(X) - 1$ și prin urmare, conform teoremei 1 (eventual prin repetarea aplicării ei de un număr finit de ori) există $Z \subseteq E$ astfel încît $Z = \bar{Z}$, $Y \subset Z \subset X$ și $r(Z) = r(X) - 1$, i.e., $\alpha(X, Z) > 0$, conform corolarului 3. Pe de altă parte, conform lemei 1, avem $\alpha(Z, Y) \geqslant 0$. Deci, conform lemei 2, obținem $\alpha(X, Y) = \alpha(X, Z) + \alpha(Z, Y) > 0$, i.e., $\alpha(X, Y) \neq 0$. (Q.E.D.)

Corolarul 4. *Fie* $X, Y \subseteq E$. *Dacă* $X, Y \in \mathcal{E}(M)$, *atunci* $\overline{X \cup Y} \in \mathcal{E}(M)$.

Demonstrație. Dacă $X \subseteq Y$, atunci $\overline{X \cup Y} = \bar{Y} = Y \in \mathcal{E}(M)$. Analog, dacă $Y \subseteq X$. Considerăm deci cazul $X \nsubseteq Y$ și $Y \nsubseteq X$. Presupunem că $\overline{X \cup Y} \notin \mathcal{E}(M)$. Prin urmare, conform teoremei 2, există $Z \subseteq E$ astfel încît $Z = \bar{Z}$, $Z \subset \overline{X \cup Y}$ și $\alpha(\overline{X \cup Y}, Z) = 0$. Conform lemei 2 avem $\alpha(\overline{X \cup Y}, Z) = \alpha(\overline{X \cup Y}, Z \cup X) + \alpha(Z \cup X, Z)$, i.e., $\alpha(\overline{X \cup Y}, Z \cup X) + \alpha(Z \cup X, Z) = 0$. Pe de altă parte, conform lemei 1, rezultă $\alpha(Z \cup X, Z) = 0$, iar cofnorm corolarului 2 obținem $\alpha(X, Z \cap X) = 0$. Dar, conform [4, teorema 2, pag. 22], $Z \cap X = \overline{Z \cap X}$. Dacă $X \nsubseteq Z$, atunci $Z \cap X \subset X$ și conform teoremei 2 rezultă că $X \notin \mathcal{E}(M)$; contradicție cu ipoteza. Arătăm acum că dacă $X \subseteq Z$, atunci $Y \nsubseteq Z$. Presupunem că $X \subseteq Z$ și $Y \subseteq Z$, i.e., $X \cup Y \subseteq Z \subset \overline{X \cup Y}$, de unde, conform (2) și (8), rezultă $r(X \cup Y) \leqslant r(Z) \leqslant r(\overline{X \cup Y}) = r(X \cup Y)$. Deci $r(Z) = r(\overline{X \cup Y})$. Dar, conform lemei 6, avem $r(Z) \leqslant r(\overline{X \cup Y}) - 1$, i.e., contradicție. Prin urmare, dacă $X \subseteq Z$, atunci $Y \nsubseteq Z$, de unde, înlocuind X cu Y în prima parte a demonstrației, obținem $Y \notin \mathcal{E}(M)$, i.e., contradicție cu ipoteza. Deci, $\overline{X \cup Y} \in \mathcal{E}(M)$ și corolarul este complet demonstrat. (Q.E.D.)

Corolarul 5. $[\mathcal{E}(M), \subseteq]$ *este o latice.*

Demonstrație. Fie $X, Y \subseteq E$. Conform [4, teorema 3, pag. 22], $\overline{X \cup Y}$ este cea mai mică (în raport cu $\subseteq$) mulțime din $\mathcal{L}(M)$ care conține pe X și Y. Prin urmare, în $[\mathcal{E}(M), \subseteq]$ putem defini conform corolarului 4, $\sup(X, Y) = \overline{X \cup Y}$. Evident, $\overline{\emptyset} \in \mathcal{E}(M)$ iar conform [4, pag. 48], $\overline{\emptyset}$ este cel mai mic element în $\mathcal{L}M)$, i.e., $\overline{\emptyset}$ este conținută în orice mulțime din $\mathcal{L}(M)$ și, deci, implicit, de orice mulțime din $\mathcal{E}(M)$. Există deci $\inf(X, Y)$ în $[\mathcal{E}(M), \subseteq]$, și corolarul este astfel complet demonstrat, (Q.E.D.)

Remarcă. În mod similar (prin dualitate) se poate demonstra că $[\mathcal{E}(M^*), \subseteq]$ este o latice.

Lema 7. *Fie* $S \subseteq E$ *și* $e \in E$. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

$$\text{(a) } r(S - \{e\}) = r(S),$$

$$\text{(b) } r(S - \{e\}) \neq r(S) - 1.$$

Demonstrație. Evident, (a) implică (b). Demonstrăm prin urmare că (b) implică (a). Scriind (4) pentru $S := S - \{e\}$ obținem $r(S - \{e\}) \leqslant$

$\leqslant r(S) \leqslant r(S - \{e\}) + 1$, i.e., $r(S) - 1 \leqslant r(S - \{e\})$, de unde, conform (b), rezultă $r(S) - 1 < r(S - \{e\})$, i.e., $r(S) \leqslant r(S - \{e\})$. Deci, $r(S - \{e\}) = r(S)$. (Q.E.D.)

Teorema 3. *Fie* $S \subseteq E$. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

(a) $S = \overset{*}{S}$,

(b) $r(E - S) = r[(E - S) - \{e\}]$, *pentru orice* $e \in E - S$.

Demonstrație. Conform (6) și (5), prin dualitate, avem $\overset{*}{S} = \{e \in E : r^*(S \cup \{e\}) = r^*(S)\} = S \cup \{e \in E - S : r^*(S \cup \{e\}) = r^*(S)\} = S \cup$

$\cup \{e \in E - S : |S \cup \{e\}| - r(E) + r[E - (S \cup \{e\})] = |S| - r(E) +$

$+ r(E - S)\} = S \cup \{e \in E - S : |S| + 1 + r[E - (S \cup \{e\})] = |S| +$

$+ r(E - S)\} = S \cup \{e \in E - S : r(E - S) = r(E - (S \cup \{e\})] + 1\}$. Prin urmare, $S = \overset{*}{S}$ dacă și numai dacă $\{e \in E - S : r(E - S) = r[E - (S \cup$ $\cup \{e\})] + 1\} = \emptyset$. Deoarece $E - (S \cup \{e\}) = (E - S) - \{e\}$ pentru orice $e \in E - S$, atunci, conform lemei 7, avem $S = \overset{*}{S}$ dacă și numai dacă $r(E - S) = r[(E - S) - \{e\}]$, pentru orice $e \in E - S$. (Q.E.D.)

Lema 8. *Fie* $S \subseteq E$ *și* $e \in S$. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

(a) $r(S - \{e\}) = r(S) - 1$,

(b) $e \in \overset{*}{\overline{E - S}}$.

Demonstrație. Deoarece $(E - S) \cup \{e\} = E - (S - \{e\})$, conform (6) și (5), prin dualitate, avem $e \in \overset{*}{\overline{E - S}} \Leftrightarrow r^*[(E - S) \cup \{e\}] = r^*(E -$ $- S) \Leftrightarrow |E - (S - \{e\})| - r(E) + r(S) - \{e\}) = |E - S| - r(E) + r(S) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |E| - |S| + 1 + r(S - \{e\}) = |E| - |S| + r(S) \Leftrightarrow r(S - \{e\}) = r(S) -$ $- 1$. (Q.E.D.)

Corolarul 6. *Fie* $S \subseteq E$ *și* $e \in S$. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

(a) $r(S - \{e\}) = r(S)$,

(b) $e \notin \overset{*}{\overline{E - S}}$.

Demonstrație. Rezultă imediat din lemele 7 și 8.

Corolarul 7. *Fie* $S \subseteq E$. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

(a) $S \in \mathscr{E}(M)$,

(b) $E - S \in \mathscr{E}(M)$.

Demonstrație. [(a) implică (b)]. Conform teoremei 3, $E - S =$ $= \overset{*}{\overline{E - S}}$ dacă și numai dacă $r(S) = r(S - \{e\})$ pentru orice $e \in S$. Prin

urmare, dacă $S \in \mathcal{E}(M)$, atunci $\mathcal{E} - S = \overset{*}{\overline{E - S}}$. Fie $e \in E - S$ ales arbitrar. Deoarece $S = \bar{S}$, conform (5) și (9), avem $r^*[(E - S) - \{e\}] = r^*[E - (S \cup \{e\})] = |E - (S \cup \{e\})| - r(E) + r(S \cup \{e\}) = |E| - |S| - 1 - r(E) + r(S) + 1 = |E| - |S| - r(E) + r(S) = |E - S| - r(E) + r(S) = r^*(E - S)$, i.e., $E - S \in \mathcal{E}(M^*)$. (Q.E.D.)

[(b) implică (a)]. Prin dualitate (deoarece $(M^*)^* = M$), conform teoremei 3, obținem $S = \bar{S}$. Fie $e \in S$ ales arbitrar. Deoarece $\overset{*}{\overline{E - S}} = E - S$ rezultă că $e \notin \overset{*}{\overline{E - S}}$ iar conform corolarului 6 avem $r(S - \{e\}) = r(S)$, i.e., $S \in \mathcal{E}(M)$. (Q.E.D.)

Corolarul 8. *Dacă* $X, Y \subseteq E$ *astfel încît* $X, Y \in \mathcal{E}(M)$, *atunci în laticea* $\mathcal{E}(M)$ *avem* $inf(X, Y) = E - [\overset{*}{\overline{E - (X \cap Y)}}]$.

Demonstrație. Conform corolarului 7 avem $E - X, E - Y \in \mathcal{E}(M^*)$. Pe de altă parte, $(E - X) \cup (E - Y) = E - (X \cap Y)$, și prin urmare, conform corolarului (4) prin dualitate), obținem $\overset{*}{\overline{E - (X \cap Y)}} \in \mathcal{E}(M^*)$, i.e., $E - \overset{*}{\overline{[E - (X \cap Y)]}} \in \mathcal{E}(M)$, conform corolarului 7. Dar (prin dualitate), conform [4, teorema 3, pag. 22], $\overset{*}{\overline{E - (X \cap Y)}}$ este cea mai mică (în raport cu $\subseteq$) mulțime din $\mathcal{E}(M^*)$ care conține pe $E - X$ și $E - Y$, i.e., $E - \overset{*}{\overline{[E - (X \cap Y)]}}$ este cea mai mare (în raport cu $\subseteq$) mulțimea din $\mathcal{E}(M)$ conținută în X și Y. (Q.E.D.)

Propoziție. *Laticea* $\mathcal{E}(M)$ *are un cel mai mare element* (*unitate*).

Demonstrație. Evident, elementul nul (cel mai mic) din $\mathcal{L}(M^*)$ este cel mai mic și în $\mathcal{E}(M^*)$. Prin urmare, conform corolarului 7, complementarul acestuia este cel mai mare element al lui $\mathcal{E}(M)$. (Q.E.D.)

Corolarul 9. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

(a) $E \in \mathcal{E}(M)$,

(b) *elementul nul al lui* $\mathcal{L}(M^*)$ *este* $\emptyset$.

Demonstrație. Conform [4, pag. 48], elementul unitate al lui $\mathcal{L}(M)$ este E, și prin urmare, corolarul 9 este demonstrat conform corolarului 7 și propoziției precedente. (Q.E.D.)

BIBLIOGRAFIE

1. *T. Luchian*, Algebră abstractă. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
2. *D. Marcu*, Some results on the span of sets in a matroid, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R. (to appear).
3. *R. von Randow*, Introduction to the theory of matroids, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer—Verlag, 1975.
4. *D. J. A. Welsh*, Matroid theory, Academic Press, New York, 1976.

On the Closed Sets of a Matroid

The aim of this note is to give some new results (in continuation of these ones from [2]) concerning the closed sets of a matroid.

CZ.: 535.58

EFECTELE UNOR FACTORI EXTERNI ASUPRA TRANZIȚIILOR DE FAZĂ CE APAR ÎN MIXTURI COLESTERICE BINARE

MARIA HONCIUC, E. SOFRON*

În lucrare se prezintă unele considerații termodinamice car explică tranziția cristal lichid smectic → cristal lichid nematic ce are loc în mixturi de tipul sitosteril undecilenat și clorură de colesteril în diferite procente de masă. Astfel de tranziții sînt puse în evidență prin modificarea dependențelor de temperatură a anizotropiilor electrice și dielectrice.

Aspecte teoretice

Prin intermediul unor factori externi s-a constatat că, în diferite mixturi colesterice binare, este posibil să se inducă tranziții de fază de tipul colesteric → smectic, colesteric → nematic, respectiv nematic → smectic și, în anumite condiții, se poate obține o reîntoarcere în nematic.

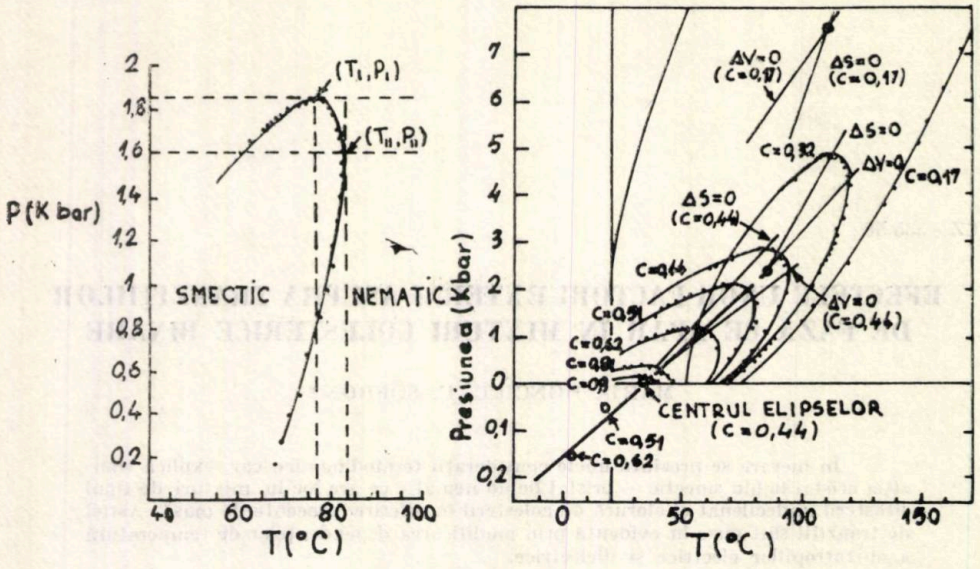
De altfel, relația între cristalele lichide nematice și cele colesterice a fost demonstrată încă din 1922 de către Friedel, arătînd că mezofaza nematică poate să fie obținută dintr-o mixtură colesterică binară compensată (cu doi compuși colesterici avînd elicități diferite), sau dintr-o altă mixtură binară în care un compus este colesteric și altul este nematic. Tranziția colesteric → nematic, în astfel de mixturi, poate să fie indusă termic sau prin aplicarea unui cîmp electric/magnetic.

Inducerea tranziției colesteric → nematic, prin cîmp electric/magnetic, a fost explicată de către Meyer [1] și de Gennes [2], stabilind relații cantitative ce exprimă dependența pasului elicei colesterice de intensitatea cîmpului electric sau magnetic extern.

În ultima vreme, o importanță tot mai mare o prezintă studiul tranziției nematic → smectic A. Referitor la aceasta, într-un articol mai recent, N. A. Clark [3] arată că în diagrama de fază presiune-temperatură pentru diferite mixturi de N-p-cyanobenzylidene-p-heptylaniline (CBHA) și N-p-cyanobenzylidene-p-nonylaniline (CBNA) are loc tranziția de fază smectic *A* → nematic, la o presiune suficient de mare, iar prin răcire se obține numai mezofaza nematică (fig. 1,a).

---

* Șef de lucrări dr., catedra Fizică; Șef lucrări dr ing., catedra Tehnologie electronică și microelectronică.



a *b*

Fig. 1. — Dependența entropiei de temperatură și presiune $S = f(P, T)$
a) — pentru o conc entrație molară $c = 0,6$
b)—pentru o gamă mai mare de concentratii molare ($F \in (0,32-0,9)$)

Pe baza observațiilor efectuate se ajunge la concluzia că, pentru anumite concentrații, crește variația de entropie ($\Delta S = S_N - S_S$)* sau scade volumul ($\Delta V = V_N - V_S$), ceea ce determină o scădere a presiunii și temperaturii pentru care are loc revenirea în mezofaza nematică (fig. 1.b). De altfel, de Vries [4] și, mai recent, P.S. Pershan și J. Proust [5] arată că o asemenea tranziție decurge direct din teoria Landau a tranzițiilor de fază, așa încît se poate considera că apare o tranziție de ordinul doi nematic → smectic (la creșterea presiunii) și, apoi, o tranziție de ordinul întîi smectic → nematic (cînd presiunea scade), așa cum se arată în figura 1.

Definindu-se diferența de energie liberă molară Gibbs (ΔG), de entropie (ΔS) și de volum (ΔV), în funcție de presiune și temperatură, se pot scrie următoarele relații :

$$\Delta G = G_N - G_S;$$

$$\Delta S = S_N - S_S = -\left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T}\right)_P;$$

$$\Delta V = V_N - V_S = \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial P}\right)_T;$$

*) S_N este entropia în nematic și S_S este entropia în smectic

unde indicii N și S se referă la mezofaza nematică, respectiv la mezofaza smectică. În plus se mai pot defini următoarele mărimi :

$$\Delta\beta = \left(\frac{\partial V_N}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial V_S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial P}\right)_T;$$

$$\Delta\alpha = \left(\frac{\partial V_N}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial V_S}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial T}\right)_P;$$

$$\Delta C_p = T\left(\frac{\partial \Delta S}{\partial T}\right)_P,$$

care reprezintă coeficientul de variație izoterm, coeficientul de variație izobar și, respectiv, variația căldurii specifice la presiune constantă.

Ținînd seama că ΔG se poate dezvolta în serie Taylor, în jurul punctului (T_0, P_0), rezultă :

$$\Delta G = \Delta G_0 + \Delta V_0(P - P_0) - \Delta S_0(T - T_0) + \frac{\Delta\beta}{2}(P - P_0)^2 +$$

$$+ \Delta\alpha(P - P_0)(T - T_0) - \frac{\Delta C_p}{2T_0}(T - T_0)^2 + \ldots$$

Deoarece $\Delta G = 0$, expresia anterioară se poate rescrie într-o formă condensată, astfel :

$$aP^2 + bT^2 + cPT + dP + eT + f = 0,$$

unde a, b, c, d, e și f reprezintă coeficienții din relația $\Delta G = f(P, T)$.

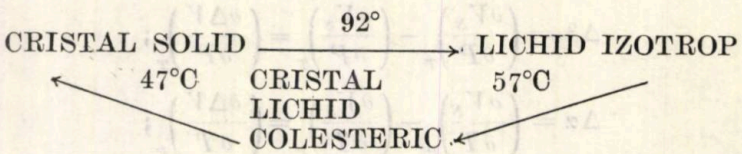
Pe această cale s-a obținut dependența $P = f(T)$ care, în general, este ecuația pentru o secțiune conică-eliptică (fig. 1). Din figura 1 se vede că, în vecinătatea maximului $P = P(T)$, ΔG își schimbă semnul iar $\Delta S < 0$ (adică $S_S > S_N$). Acest fapt explică revenirea în mezofaza nematică a mixturii de cristal lichid, adică posibilitatea tranziției smectic → nematic.

Un astfel de studiu se efectuează pe baza urmăririi dependenței de temperatură a anizotropiilor electrice și dielectrice, în scopul determinării posibilităților și condițiilor de obținere a mezofazei nematice. De exemplu, compusul studiat — sitosteril undecilenat și clorură de colesteril — se încadrează în tipul de mixturi avînd comportarea descrisă mai sus.

Aspecte experimentale

Compușii de bază ai mixturilor studiate, în lucrarea de față, au următoarele caracteristici : sitosteril undecilenat are numai mezofază smectică la răcire (smectic monotrop), cu tranzițiile caracteristice

respectiv clorura de colesteril prezintă numai mezofază colesterică la răcire (colesteric monotrop), cu tranzițiile caracteristice



Asupra acestor mixturi s-au efectuat măsurători de anizotropie electrică ($\sigma_a = \sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}$) și de anizotropie dielectrică ($\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$), în funcție de temperatură. Pentru efectuarea măsurătorilor fiecare mixtură a fost încapsulată în celule din sticlă, cu electrozi transparenți din SnO_2, folosindu-se distanțori Mylar cu care s-a delimitat grosimea stratului de cristal lichid (30 μm). Montajul de măsură este identic cu cel prezentat în lucrarea [4]. Alinierea stratului de cristal lichid s-a făcut într-un cîmp magnetic de 1,1 T, prin răcire lentă a acestuia din faza de lichid izotrop. Probele au fost încălzite într-o incintă termostatată, iar temperatura s-a măsurat cu ajutorul unui termocuplu Cu — Ct, avînd o precizie de 0,5°C. Pentru estimarea anizotropiilor electrice și dielectrice s-au folosit rapoartele :

$$R = \frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp}} \text{ și } P = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \qquad [5]$$

Rezultate experimentale

În figura 2 sînt prezentate dependențele $R = f(T)$ și $P = f(T)$, la mixtura cu 75% sitosteril undecilenat și 25% clorură de colesteril. Se observă că această mixtură nu prezintă salturi în cele două dependențe menționate anterior.

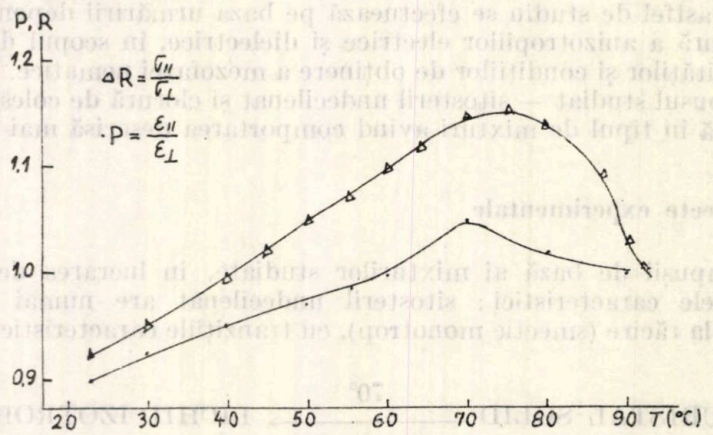


Fig. 2. — Dependența anizotropiei electrice (R) și a anizotropiei dielectrice (P) de temperatură, pentru mixtura sitosteril undecilenat-clorură de colesteril (75% — 25%)

Anizotropia conductivității electrice este pozitivă ($R>1$) și crescătoare pe intervalul de temperatură 92°C — 72°C, iar după 72°C anizotropia rămîne pozitivă și scade ca valoare pe intervalul de 72°C — 45°C, pentru ca la temperatura de 41°C să devină negativă.

Anizotropia permitivității dielectrice (P) este de asemenea pozitivă ($P>1$) pe intervalul de 92°C — 75°C, ca apoi să scadă la zero cînd temperatura atinge valoarea de 62°C, schimbîndu-și astfel semnul ($P<1$).

Această mixtură prezintă deci mezofază colesterică, caracterizată prin $\sigma_a>0$ și $\varepsilon_a>0$ ($R>1$ și, respectiv, $P>1$) pe intervalul de 92°C — 72°C, ca apoi să apară domenii caracteristice ordonării smectice, de tip A, într-o textură colesterică, fapt ce determină scăderea valorilor pentru cele două anizotropii. Comportarea mixturii colesterice la temperatura de 62°C se poate asocia cu o tranziție de fază colesteric → smectic. Mezofaza smectică este caracterizată prin $\sigma_a<0$ și $\varepsilon_a<0$ ($R<1$ și $P<1$).

În figura 3 sînt prezentate dependențele $R=f(T)$ și $P=f(T)$ pentru mixtura cu 50% sitosteril undecilenat și 50% clorură de colesteril, din care se observă că, pe intervalul de 90°C — 55°C, mezofaza colesterică

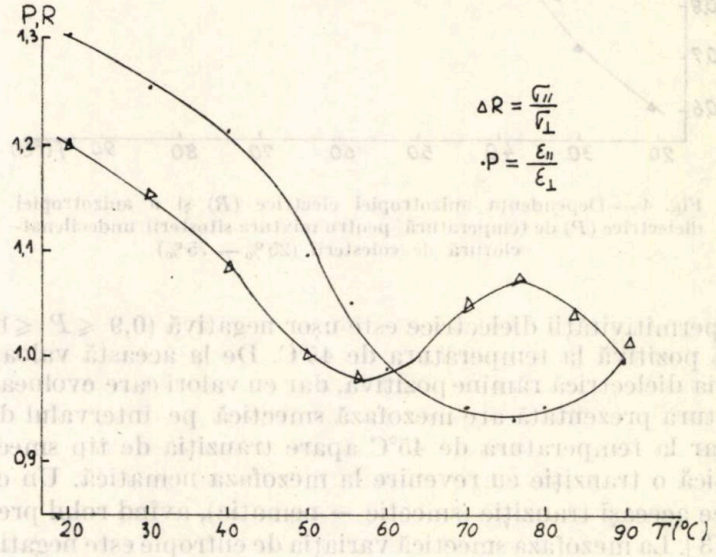


Fig. 3 — Dependența anizotropiei electrice (R) și a anizotropiei dielectrice (P) de temperatură, pentru mixtura sitosteril undecilenat-clorură de colesteril (50% — 50%)

are anizotropie electrică pozitivă ($R>1$) și anizotropie dielectrică negativă ($P<1$). La temperatura de 55°C, anizotropia dielectrică prezintă un salt și devine pozitivă ($P>1$). Dependența $P=f(T)$, la această temperatură (55°C), prezintă un minim, după care crește la valori pozitive. Saltul constatat se poate asocia procesului de formare a unor grupări cibotactice caracteristice mezofazei smectice, într-o textură colesterică [6], ca la temperatura de 35°C să se înregistreze o creștere a acelor două tipuri de anizotropii, fapt ce corespunde reîntoarcerii la mezofaza nematică.

Dependențele $R = f(T)$ și $P = f(T)$ pentru o altă mixtură, cu 25% sitosteril undecilenat și 75% clorură de colesteril, sînt prezentate în figura 4. Pe intervalul de mezofază colesterică (90°C — 45°C), anizotropia conductivității electrice este pozitivă. De la temperatura de 45°C în jos, valoarea acestei anizotropii devine negativă. Pe intervalul de 90°C — 73°C, ani-

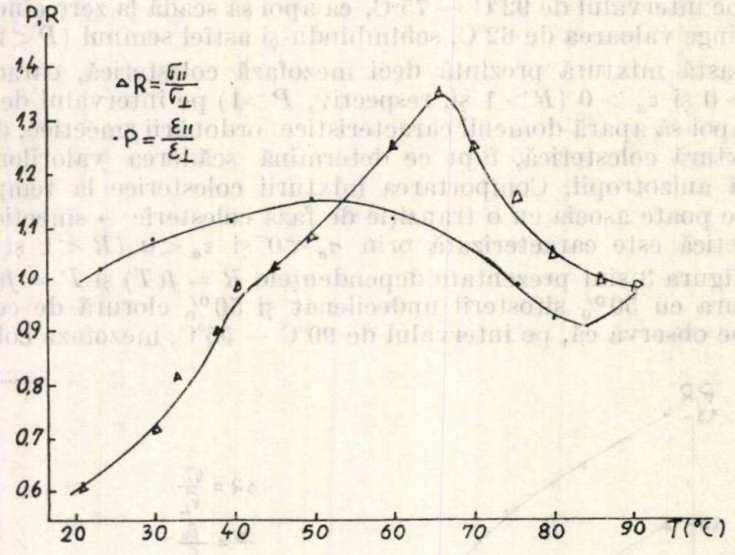


Fig. 4 — Dependența anizotropiei electrice (R) și a anizotropiei dielectrice (P) de temperatură pentru mixtura sitosteril undecilenat-clorură de colesteril (25% — 75%)

zotropia permitivității dielectrice este ușor negativă ($0{,}9 \leqslant P \leqslant 1$), ca apoi să devină pozitivă la temperatura de 45°C. De la această valoare (45°C), anizotropia dielectrică rămîne pozitivă, dar cu valori care evoluează în scădere. Mixtura prezentată are mezofază smectică pe intervalul de 73°C — — 45°C, iar la temperatura de 45°C apare tranziția de tip smectic → nematic, adică o tranziție cu revenire la mezofaza nematică. Un cîmp electric induce aceeași tranziție (smectic → nematic), avînd rolul presiunii din lucrarea [3]. La mezofaza smectică variația de entropie este negativă ($\Delta S < < 0$).

Concluzii

Din rezultatele obținute reiese că într-o mixtură ai cărei compuși prezintă numai mezofază colesterică și smectică se poate obține, la temperaturi scăzute, mezofaza nematică ca o „revenire în nematic".

Se consideră că „revenirea în nematic" este caracteristică mixturilor cu un procent mai mare de clorură de colesteril, compus ce determină obținerea mezofazei nematice în mixturi de tip colesteric [7].

BIBLIOGRAFIE

1. *R. B. Meyer*, Appl. Phys. Letters 12, 281 (1968)
2. *P. G. De Gennes*, Solid State Commun. 6, 163 (1968)
3. *N. N. Clark*, J. de Phys. 40, C3—345 (1979)
4. *P. G. De Gennes*, Solid State Commun. 10, 753 (1972)
5. *P. S. Pershan, J. Proust*, J. de Phys. 40, 27 (1979)
6. *M. Honciuc*, Teza de doctorat, Bucureşti, 1977
7. *M. Honciuc, ş. a.*, Studii şi cercetări de fizică, 1, 31, 29 (1979)

The Effects of Some External Factors on Phase Transitions that Appear in Binary Cholesteric Mixtures

The paper presents some thermodynamic considerations that can explain the transition liquid crystal smectic → liquid crystal nematic that takes place in mixtures of the type : sytosteril undecilenat and chloride of cholesteryl in different percentages of mass. Such transitions are exhibited through the modification of the electrical and dielectrical anysothropies.

C.Z.: 519.216

COMBINAREA METODEI PERTURBAȚIILOR SUCCESIVE CU TEHNICA DE SUMABILITATE PADÉ-BOREL

V. A. POPESCU*

Este evidențiat avantajul folosirii tehicii de sumabilitate Padé-Borel în conjuncție cu metoda perturbațiilor succesive în cazul cînd perturbațiile nu sînt prea mari. Acest lucru este ilustrat în cazul oscilatorului anarmonic.

Introducere

Valoarea energiei stării fundamentale a oscilatorului anarmonic $p^2 + x^2 + \beta x^4 (\beta > 0)$ a fost determinată destul de precis folosind metoda perturbațiilor succesive [1]. În această metodă perturbația este divizată în elemente mici αV, βV, ..., care se aplică succesiv, adică αV este aplicat la Hamiltonianul neperturbat, βV la Hamiltonianul perturbat cu αV, etc.

Hamiltonianul total

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + x^2 + \beta x^4 \tag{1}$$

este compus din Hamiltonianul neperturbat

$$\hat{H}_0 = \hat{p}^2 + x^2 \tag{2}$$

și din perturbația

$$V = \beta x^4 \tag{3}$$

În aproximația de ordinul al doilea a teoriei perturbațiilor, valorile proprii ale Hamiltonianului perturbat sînt date de relația

$$E_n^1 = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 \tag{4}$$

unde

$$a_0 = 2n + 1,\ a_1 = \frac{3}{2}\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right),\quad a_2 =$$

$$= -\frac{1}{16}(34\,n^3 + 51\,n^2 + 59\,n + 21)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

iar β este un parametru perturbațional.

* Asist. catedra de Fizică

Folosind tehnica de sumare Borel în aproximația de ordinul doi pentru starea fundamentală a oscilatorului anarmonic cuartic se obține

$$E_B^1 = \int_0^\infty e^{-a}\left[1 + \frac{3}{4}(\beta a) - \frac{21}{32}(\beta a)^2\right] da = 1 + \frac{3}{4}\beta - \frac{21}{16}\beta^2, \qquad (6)$$

deci se reobține seria din teoria uzuală a perturbațiilor (vezi (4), (5) cu $n = 0$).

În cazul cînd perturbația este βx^4 a fost dovedit că transformarea Borel dă o secvență infinită de aproximante Padé care nu au zeroui și poli în vecinătatea axei reale pozitive și de aceea sînt convergente în această regiune [2]. Specificînd pentru seriile de forma (4) obținem

$$E_B^{[1,1]} = \int_0^\infty e^{-a} \frac{\left[a_1 a_0 + \left(a_1^2 - \frac{a_2}{2} a_0\right)\beta a\right]}{a_1 - \frac{a_2}{2}\beta a} da =$$

$$= \frac{2a_1 a_0}{|a_2|\beta} \int_0^\infty \frac{e^{-a}\, da}{\frac{2a_1}{|a_2|\beta} + a} + \frac{2\left(a_1^2 - \frac{a_2}{2} a_0\right)}{|a_2|\beta} \int_0^\infty \frac{e^{-a}\, a\, da}{\frac{2a_1}{|a_2|\beta} + a} =$$

$$= a_0 \cdot {}_2F_0\left(1, 1; -\frac{|a_2|\beta}{2a_1}\right) + \frac{\left(a_1^2 - \frac{a_2}{2} a_0\right)\beta}{a_1} \cdot {}_2F_2\left(2, 1 : -\frac{|a_2|\beta}{2a_1}\right)$$

unde ${}_2F_0(a, b; z)$ este funcția hipergeometrică.

Integralele de forma $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\, dt}{x + t}$ și $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\, t\, dt}{x + t}$ reprezintă exemple de fracții continue care sînt aproximate Padé [3]. Acestea pot fi calculate și direct [4].

Deoarece seriile care intervin sînt asimptotice divergente, există un optim de trunchiere pentru aceste serii [4].

Metoda

Expresia (4), la fel ca și acelea care rezultă prin divizarea perturbației ($\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p$), sînt obținute folosind relațiile [1]

$$E_n^p = E_n^{p-1} + \beta V_{nn} + \beta^2 \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{nm}}{E_n^{p-1} - E_m^{p-1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \qquad (8)$$

unde

$$V_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \psi_m^{p-1} \psi_n^{p-1} \, dx, \; p = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

β poate fi oricare din $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$, iar ψ_n^{p-1} sînt ortonormalizate folosind procedeul de ortogonalizare a lui Schmidt [1].

Tehnica de sumabilitate Padé-Borel a fost aplicată la fiecare din seriile de forma (8) care apar în metoda perturbațiilor succesive.

Am divizat perturbația dată în elemente egale $\beta_1 = \beta_2 \ldots = \beta_p$, rezultatul calculelor fiind prezentat în tabelul 1 (calculele au fost efectuate în dublă precizie).

Tabelul 1

Compararea metodei perturbațiilor succesive (SPM), și metodei care combină metoda perturbațiilor succesive cu tehnica de sumabilitate a lui Padé (SPM—Padé) cu metoda propusă în această lucrare, în aproximația de ordinul al doilea ($\beta = 1/1000$; valorile în unități $\hbar = 1$, $m\omega = 1$)

SPM	SPM-Padé [5]	Această lucrare	Valoarea exactă [6]
1.0007486915 ($\beta_1 = \beta_2 = 1/2000$)	1.000748692080 ($\beta_1 = \beta_2 = 1/2000$)	1.000748692365 ($\beta_1 = \beta_2 = 1/2000$)	1.000748692673
1.0007486922 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1/3000$)	1.000748692480 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1/3000$)	1.000748692606 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1/3000$)	
1.0007486925 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/4\,000$	1.000748692620 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/4000$)	1.000748692691 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/4000$)	
1.0007486925 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1/5000$)	1.000748692544 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1/5000$)	1.000748692589 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1/5000$)	

Concluzii

În tabelul 1 se constată că metoda propusă în această lucrare dă o soluție asimptotică care este mai bună decît metoda care combină metoda perturbațiilor succesive cu tehnica de sumabilitate a lui Padé [5].

Pe baza rezultatelor obținute într-o lucrare anterioară [5] putem afirma că această metodă este superioară metodei uzuale a perturbațiilor (deci și a metodei Borel directă așa cum am arătat în acest articol), metodei lui Padé și metodei perturbațiilor succesive, toate fiind considerate în aproximația de ordinul doi.

Deoarece ambele metode dau rezultate mai bune pentru un număr mai mare de termeni este de așteptat ca acest lucru să fie îndeplinit și pentru metoda combinată propusă în această lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. A. Popescu, I. M. Popescu*, Phys. Rev. sub tipar.
2. *S. Graffi, V. Grecchi, B. Simon*, Phys. Lett., 32 B, 631 (1970).
3. *G. A. Baker, jr., P. G. Morris*, ,,Padé Approximants", Part. I, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1981.
4. *A. H. Nayfeh*, ,,Introduction to Perturbation Techniques", New York, 1981.
5. *V. A. Popescu, I. M. Popescu*, Roum. Phys. sub tipar.
6. *K. Banerjee*, Proc. R. Soc. Lond. A. 364, 265 (1978).

A Joint Method Combining the Successive Perturbation Method with the Padé-Borel Summability Technique

The advantage of using the Padé-Borel summability technique in conjunction with the successive perturbation method, provided perturbation are not too great, is pointed out and proved for the anharmonic oscillator.

C.Z.: 621.3· 017.21:621.316.13.001.24

METODĂ PENTRU CALCULUL PIERDERILOR JOULE ÎN ARMĂTURILE INELARE ALE LINIILOR ELECTRICE AERIENE

A. MORARU, FL. MANEA*

În lucrare se prezintă o metodă pentru determinarea curenților induși în laturile armăturilor inelare de protecție și egalizare ale liniilor electrice aeriene; cu ajutorul valorilor curenților se determină pierderile aferente laturilor și pe ansamblul armăturii.

1. Introducere

Armăturile pentru rețele electrice sînt dispozitivele cu ajutorul cărora se asamblează și se montează conductoare, cabluri, izolatoare și alte accesorii ale acestor rețele.

În cazul liniilor echipate cu izolatoare de suspensie se folosesc și dispozitive care au rolul ca, în cazul apariției unor supratensiuni la capetele lanțului de izolatoare, să protejeze conductorul contra atingerii directe a arcului electric și să uniformizeze cîmpul electric în lungul lanțului de izolatoare [1].

Armăturile de protecție ale liniilor electrice aeriene sînt realizate în general sub formă de coarne sau inele (circulare sau de altă formă). Pentru liniile de tensiuni mai mari de 110 kV se folosesc de obicei armături inelare. Laturile acestor armături formează circuite închise aflate în cîmp magnetic variabil, în ele inducîndu-se curenți ce produc pierderi și solicitări termice. În fig. 1 se prezintă o armătură inelară de protecție pentru o linie de 750 kV.

Avînd în vedere că la tensiuni foarte înalte dimensiunile armăturilor cresc și odată cu ele cresc și curenții induși, apare necesară determinarea acestora și a pierderilor aferente pentru a se vedea dacă nu se depășesc anumite valori acceptabile.

2. Ipoteze de calcul

Pentru determinarea curenților laturilor armăturii se folosește metoda curenților ciclici, aplicată pe buclele închise independente ale armăturii. Această metodă presupune cunoașterea t.e.m. de ochi aferente

* Conf. dr. ing. catedra Electrotehnică; Ing., I.R.E. Giurgiu

fiecărei bucle în parte. Valoarea efectivă a t.e.m. de ochi este proporțională cu cea a fluxului magnetic prin buclă, astfel încît apare necesară determinarea fluxurilor magnetice prin buclele armăturii.

Metoda de calcul propusă are la bază următoarele ipoteze simplificatoare:

— conductoarele se consideră rectilinii;

— se neglijează influența pămîntului;

— se neglijează reacția curenților induși, respectiv se neglijează inductivitatea proprie a laturilor armăturii;

— grosimea barelor ce formează armătura se consideră mică în raport cu dimensiunile armăturii și cu distanțele la conductoare;

— părțile curbe ale armăturii se aproximează prin segmente de dreaptă.

În aceste condiții buclele armăturii apar ca fiind formate din segmente filiforme. Calculul curenților induși impune deci determinarea fluxului magnetic prin bucle spațiale de formă oarecare, bucle ce sînt formate din segmente de dreaptă și se află în cîmpul magnetic produs de curenții unor conductoare rectilinii, infinite.

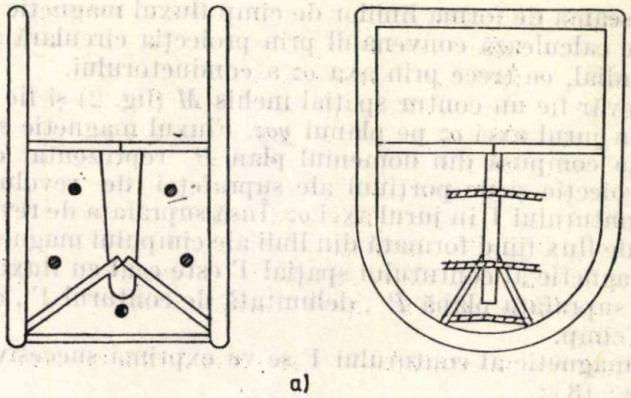
3. Topologia circuitului și calculul rezistențelor

Prin considerarea ipotezelor expuse anterior, armătura apare ca un circuit electric rezistiv pentru care se determină t.e.m. de ochi. Rezistențele ce intervin sînt rezistențele laturilor armăturii, care se calculează cu formule cunoscute, luînd în considerare dimensiunile (rază interioară exterioară, lungime) și rezistivitatea corespunzătoare materialului armăturii (pentru oțel $\rho = 0.1 \ldots 0{,}25\ \Omega mm^2/m$).

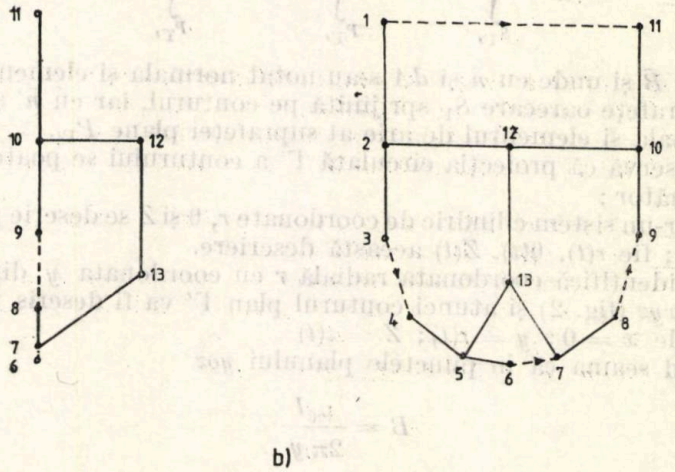
Pentru aplicarea metodei curenților ciclici, pe graful prin care se reprezintă armătura se alege un arbore și cu ajutorul laturilor coarbore se determină buclele independente, adoptînd sensul de parcurgere al buclei sensul impus de latura coarbore (de la nod cu număr de ordine mai mic la nod cu număr de ordine mai mare) [2]. În fig. 1.b. se prezintă și graful asociat armăturii, graf ce are 16 laturi, 13 noduri și prezintă patru bucle independente. Cu linie continuă au fost figurate laturile arbore iar cu linie întreruptă laturile coarbore ce determină buclele independente.

4. Calculul t.e.m. de ochi

Așa cum s-a arătat anterior calculul curenților induși presupune determinarea fluxului magnetic prin buclele independente ale armăturii. În continuare va fi analizat cazul în care cîmpul magnetic este produs de un singur conductor rectiliniu, a cărui axă coincide cu axa *oz* a reperului cartezian, deoarece, prin aplicarea superpoziției, fluxul magnetic total se obține ca sumă a fluxurilor produse de curentul fiecărui conductor luat separat. În acest caz liniile de cîmp vor fi cercuri situate în plane perpendiculare pe axa *oz* a conductorului și cu centrul pe această axă.



a)



b)

Fig. 1 — Armătură de protecție și egalizare pentru lanțuri duble de susținere LEA 750 kV; a) vederi, b) graful asociat

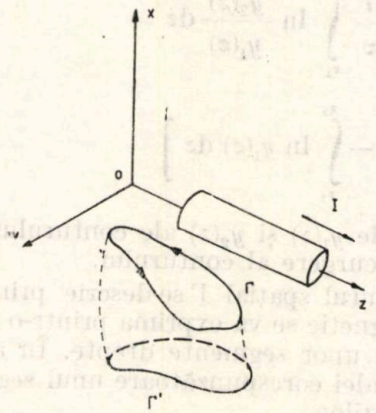


Fig. 2 — Contur spațial și proiecția sa

Ţinînd seama de forma liniilor de cîmp fluxul magnetic asociat conturului dat se calculează convenabil prin proiecţia circulară a conturului pe un plan radial, ce trece prin axa oz a conductorului.

Într-adevăr fie un contur spaţial închis M (fig. 2) şi fie Γ' proiecţia sa circulară în jurul axei oz pe planul yoz. Fluxul magnetic se calculează prin suprafaţa compusă din domeniul plan P reprezentat de interiorul conturului proiecţie şi de porţiuni ale suprafeţei de revoluţie obţinută prin rotirea conturului Γ în jurul axei oz. Însă suprafaţa de revoluţie reprezintă un tub de flux fiind formată din linii ale cîmpului magnetic (cercuri), deci fluxul magnetic al conturului spaţial Γ este egal cu fluxul conturului Γ'. Totodată suprafaţa plană P , delimitată de conturul Γ', este normală pe liniile de cîmp.

Fluxul magnetic al conturului Γ se va exprima succesiv prin următoarele forme : [3] :

$$\Phi_{s\Gamma} = \int\limits_{S_{\Gamma'}} \bar{B}\bar{n}\, dA = \int\limits_{P_{\Gamma'}} \bar{B}\bar{n}'dA' = \int\limits_{P_{\Gamma'}} BdA' \tag{1}$$

întrucît $\bar{n}' \| \bar{B}$ şi unde cu $\bar{n}$ şi dA s-au notat normala şi elementul de arie al unei suprafeţe oarecare S_Γ sprijinită pe conturul, iar cu $\bar{n}'$ şi dA' s-au notat normala şi elementul de arie al suprafeţei plane $P_{\Gamma'}$.

Se observă că proiecţia circulară Γ' a conturului se poate obţine în modul următor :

— într-un sistem cilindric de coordonate r, θ şi Z se descrie parametric conturul Γ ; fie $r(t)$, $\theta(t)$, $Z(t)$ această descriere.

— se identifică coordonata radială r cu coordonata y din sistemul cartezian $oxyz$ (fig. 2) şi atunci conturul plan Γ' va fi descris parametric prin relaţiile $x = 0$; $y = r(t)$; $Z = z(t)$.

Ţinînd seama că în punctele planului yoz

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, y} \tag{2}$$

fluxul magnetic se va exprima sub formele

$$\Phi_{S_{\Gamma'}} = \int\limits_{P_{\Gamma'}} \frac{\mu_0 I}{2\pi\, y}\, dy\, dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int\limits_{z_1}^{z_2} \ln \frac{y_2(z)}{y_1(z)}\, dz =$$

$$= \frac{\mu_0\, I}{2\pi} \left[\int\limits_{z_1}^{z_2} \ln y_2(z)\, dz - \int\limits_{z_1}^{z_2} \ln y_1(z)\, dz \right] \tag{3}$$

folosind notaţiile din figura 3. Ramurile $y_1(z)$ şi $y_2(z)$ ale conturului sînt definite ţinînd seama de sensul de parcurgere al conturului.

Cum s-a arătat mai înainte, conturul spaţial Γ se descrie prin segmente drepte (fig. 4). Astfel, fluxul magnetic se va exprima printr-o sumă de integrale corespunzătoare proiecţiei unor segmente drepte. În anexă se stabileşte expresia analitică a integralei corespunzătoare unui segment drept dat prin coordonatele extremităţilor.

Fluxul magnetic rezultant al unei bucle date se obţine însumînd contribuţia fiecărui conductor al liniei electrice de transport. Dacă $\underline{\Phi}_\Sigma$ este imaginea complexă a fluxului magnetic rezultant al unei bucle, t.e.m.

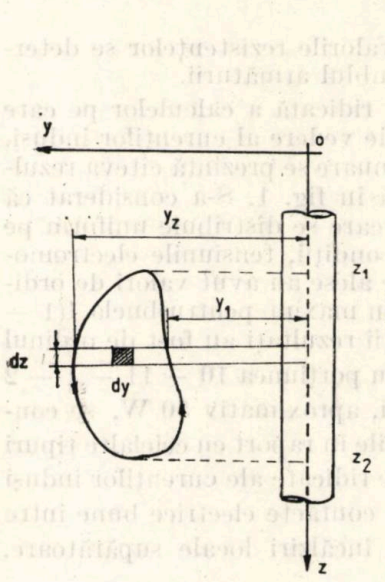


Fig. 3 — Notaţii la calculul fluxului magnetic

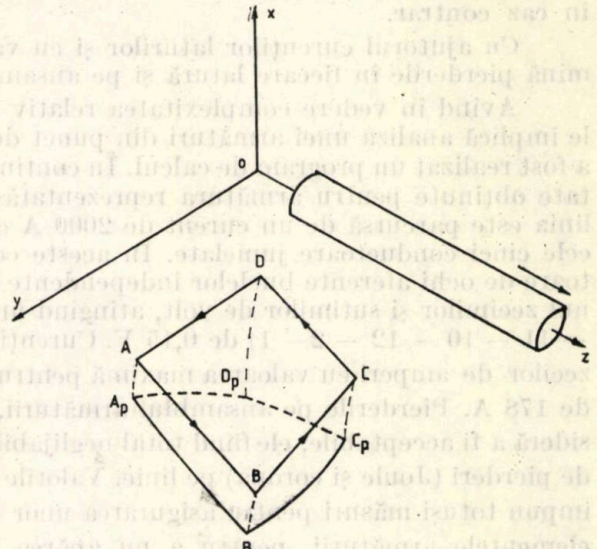


Fig. 4 — Contur spaţial format din segmente drepte

de contur corespunzătoare se obţine în baza legii inducţiei electromagnetice şi are imaginea complexă

$$\underline{E} = -j\omega\underline{\Phi}_\Sigma \tag{4}$$

unde ω este pulsaţia curentului alternativ al conductorului liniei.

5. Calculul curenţilor şi al pierderilor

Cu ajutorul metodei expuse anterior se determină vectorul cu n_b componente al t.e.m. de ochi $[E_c]$, format din imaginile complexe ale t.e.m. ale ochiurilor. Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii :

$$[E_c] = [R_c] \cdot [I_c] \tag{5}$$

rezultă vectorul curenţilor ciclici $[I_c]$ conform relaţiei matriceală e

$$[I_c] = [R_c]^{-1} [E_c] \tag{6}$$

din care se calculează curenţii laturilor armăturii.

Matricea pătrată $[R_c]$ are ca ordin numărul de bucle independente n_b. Fiecare linie a matricii corespunde unei bucle, elementele ei determinîndu-se astfel :

— elementul diagonal este suma rezistenţelor laturilor buclei.

— un element nediagonal corespunde sumei rezistențelor laturilor comune buclei considerate și unei alte bucle (numărul de ordine al coloanei în care se află elementul); elementul se consideră cu semnul plus dacă laturile comune sînt parcurse în același sens în ambele bucle și minus în caz contrar.

Cu ajutorul curenților laturilor și cu valorile rezistențelor se determină pierderile în fiecare latură și pe ansamblul armăturii.

Avînd în vedere complexitatea relativ ridicată a calculelor pe care le implică analiza unei armături din punct de vedere al curenților induși, a fost realizat un program de calcul. În continuare se prezintă cîteva rezultate obținute pentru armătura reprezentată în fig. 1. S-a considerat că linia este parcursă de un curent de 2000 A care se distribuie uniform pe cele cinci conductoare jumelate. În aceste condiții, tensiunile electromotoare de ochi aferente buclelor independente alese au avut valori de ordinul zecimilor și sutimilor de volt, atingînd un maxim pentru bucla I(1 — — 11 — 10 — 12 — 2— 1) de 0,15 V. Curenții rezultați au fost de ordinul zecilor de amperi cu valoarea maximă pentru porțiunea 10 — 11 — 1 — 2 de 178 A. Pierderile pe ansamblul armăturii, aproximativ 50 W, se consideră a fi acceptabile, ele fiind total neglijabile în raport cu celelalte tipuri de pierderi (Joule și corona) pe linie. Valorile ridicate ale curenților induși impun totuși măsuri pentru asigurarea unor contacte electrice bune între elementele armăturii, pentru a nu apărea încălziri locale supărătoare.

Anexă: *Determinarea expresiei analitice a integralei corespunzătoare unui segmeat drept, dat prin coordonatele extremităților.*

Fie segmentul AB(fig. 5) dat prin coordonatele extremităților $A_{(x_1'y_1'z_1')}$ și $B_{(x_2'y_2'z_2')}$ și A_pB_p proiecția circulară a acestui segment pe un plan ce trece prin axa oz a conductorului (pentru simplitate, acest plan s-a ales chiar yoz). Ecuația curbei $A\,B$ se determină pornind de la ecuația parametrică a segmentului de dreaptă ce unește punctele A și B:

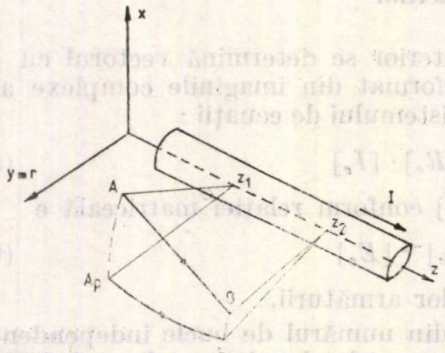


Fig. 5 — Segment de dreaptă în spațiu și proiecția sa

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

$$t \in [0, 1]\ (A_1)$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t$$

Razade la axa oz la un punct oarecare al curbei este

$$r^2 = x^2 + y^2 = r_1^2 + (r_2^2 - r_1^2 - \Delta r^2)t + \Delta r^2 t^2 \quad (A_2)$$

în care s-au făcut notațiile :

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 \qquad (A_3)$$

$$\Delta r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Relația (A_2) împreună cu (A.1.3) determină o reprezentare parametrică a curbei în planul de proiecție yz (în care s-a identificat coordonata radială r cu y).

Termenul integral

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \ln y(z)\, dz, \quad y(z) \equiv r(z) \qquad (A_4)$$

devine, prin înlocuirea variabilelor cu reprezentările lor parametrice

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\bar{n}} (z_2 - z_1) \int_0^1 \ln r(t)\, dt =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\bar{n}} (z_2 - z_1) \int_0^1 \ln\ (at^2 + bt + c)\, dt \qquad (A_5)$$

în care s-au folosit notațiile

$$a = \Delta r^2$$

$$b = r_2^2 - r_1^2 - \Delta r^2 \qquad (A_6)$$

$$c = r_2^2$$

În urma calculului integralei definite din (11) rezultă relația generală

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ (z_2 - z_1) \left(\ln r_2^2 + \frac{b}{2a} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2r_1^2 + b} - 2 \right) \qquad (A_7)$$

cu

$$\Delta = b^2 - 4\,ac < 0 \ \forall (x_1, y_1) \text{ și } (x_2, y_2) \qquad (A_8)$$

În cazul particular $a = 0$ ($x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$), prin trecere la limită se obține

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{4} (z_2 - z_1) \ln r_2^2 \qquad (A_9)$$

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Arie*, ș.a. Rețele electrice — calculul mecanic, Editura tehnică, 1981.
2. *N. Balabanian*, Teoria modernă a circuitelor, Editura tehnică, 1974.
3. *C. I. Mocanu*, Teoria cîmpului electromagnetic, Editura didactică și pedagogică, 1981.

Method for Calculation of the Joule Losses in Arcing Rings of the Electrical Overhead Lines

In the paper a method is presented for estimation of the currents induced in the branches of arcing rings of the electrical overhead lines, then the electrical losses are calculated in these rings.

C.Z. 537.228

VARIATIONAL PRINCIPLES. POWER STATIONARITY FORMULATION

D. STANOMIR*

This paper is the first of a series of ones devoted to variational principles for distributed parameter systems. Here we discuss a variational principle given by Anderson and Arthurs. At the end we give some examples and comments with respect to the possibilities of this principle.

1. Notations, Basic Spaces

We consider two real Hilbert spaces H_a and H_b with their corresponding inner products

$$H_a(u) : \langle u_1, u_2 \rangle,$$

$$H_a(v) : \langle v_1, v_2 \rangle ;$$

and four operators

$$P : H_b \to H_a, \; P^x : H_a \to H_b,$$

$$Q : H_a \to H_a, R : H_b \to H_b ;$$

where P^x denotes the adjoint of P

$$\langle Pu, v \rangle = \langle u, P^x v \rangle,$$

and Q and R are self adjoint with respect to the spaces where they are defined.

Now, we introduce the product space

$$H(w) = H_a(u) \times H_b(v)$$

with $w^T = [u, v]$ (by T the transpose is denoted) and its inner product

$$\langle w_1, w_2 \rangle \overset{\Delta}{=} \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle.$$

The following system of equations will be considered in the sequel. Such a system will be called a *coupled system of linear equations.*

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ P^x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix}. \tag{1}$$

---

* Associated Prof., Chair of Radiocommunications

If we define the operators

$$\mathbf{A}: H \to H,\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}: H \to H, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

and write

$$h^T = [f_a,\ f_b],$$

the system (1) becomes

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\, w = h. \tag{2}$$

It is clearly that **A** and **B** are selfadjoint in H.

2. Power Stationarity Formulation

If we denote

$$e(w) = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\, w - h \tag{3}$$

it is seen that $e(w)$ is a *potential operator* [3]. It comes from a *potential* or *power function* which is

$$\mathbf{P}(w) = \frac{1}{2} \langle (\mathbf{A} - \mathbf{B})\, w, w \rangle - \langle h, w \rangle,$$

or in terms of u and v

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} [\langle Pv, u \rangle + \langle P^x u, v \rangle - \langle Qu, u \rangle - \langle Rv, v \rangle] -$$

$$- \langle u, f_a \rangle - \langle v, f_b \rangle. \tag{3'}$$

We denote this scalar as $I(u, v)$.

In a stationary point we have

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial w} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = 0 \end{matrix}$$

which gives (1). Also, in the point w_0, the stationary point, we get

$$\mathbf{P}(w_0) = \frac{1}{2} \langle (\mathbf{A} - \mathbf{B})\, w_0, w_0 \rangle - \langle h, w_0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle h, w_0 \rangle - \langle h, w_0 \rangle = -\frac{1}{2} \langle h, w_0 \rangle = I(u_0, v_0).$$

Therefore the solution of (1) can be obtained by approximating the solution with some testing functions, having some variable parameters, that make $P(w)$ stationary.

3. Complementary Principles

The stationarity of P is expressed through the system of equations

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u} = I_u = Pv - Qu - f_a = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} = I_v = P^x u - Rv - f_b = 0,$$

or

$$I_u(u_0, v_0) = 0,$$

$$I_a(u_0, v_0) = 0.$$

We define two families of functions

$$M_1 = \{(u, v) \in H \mid I_u = 0\}, \tag{4}$$

$$M_2 = \{(u, v) \in H \mid I_v = 0\},$$

whence it is clear that

$$w_0 = (u_0, v_0) \in M_1 \cap M_2.$$

Also, we denote

$$I(u_1, v_1) = I(u, v)|_{M_1},$$

$$I(u_2, v_2) = I(u, v)|_{M_2}.$$

The forms $I(u_1, v_1)$ and $I(u_2, v_2)$ are each stationary at the critical point w_0 so they are called *complementary* to each other. They give *complementary principles.*

In order to obtain the behaviour of $P(w)$ on the sets M_1 or M_2, we express it as

$$P(w) = I(u, v) = \frac{1}{2} \langle I_u, u \rangle + \frac{1}{2} \langle I_v, v \rangle + I(u_0, v_0). \tag{5}$$

Now, on M_1 we have

$$I_u = 0 \text{ or } u_1 = Q^{-1}(Pv_1 - f_a), \tag{6}$$

with Q inversable.

Then $I(u_1, v_1)$ becomes

$$I(u_1, v_1) = \frac{1}{2} \langle I_v, v \rangle|_{u_1} + I(u_0, v_0),$$

and after a little algebra we get

$$I(u_1, v_1) = J(v_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\langle (P^x Q^{-1} P - R) v_1, v_1\rangle - \frac{1}{2}\langle P^x Q^{-1} f_a, v_1\rangle -$$

$$- \langle f_b, v_1\rangle - \frac{1}{2}\langle Q^{-1} f_a, f_a\rangle. \tag{7}$$

The scalar valued function $J(v_1)$ becomes stationary when

$$\frac{\partial J}{\partial v_1} = (P^x Q^{-1} P - R) v_1 - P^x Q^{-1} f_a - f_b = 0, \tag{8}$$

which is the second condition for the stationarity of $P(w)$.

If, in addition,

$P^x Q^{-1} P - R = D_1 > 0$ (positive definite),

then w_0 is a *minimum point*, i.e.

$$J(v_1) \geqslant J(v_0) = I(u_0, v_0). \tag{9}$$

Similarly, we find that on M_2 we have

$$I_v = 0 \text{ or } v_2 = R^{-1}(P^x u_2 - f_b)$$

with R inversable, and

$$I(u_2, v_2) = G(u_2) = \frac{1}{2}\langle (PR^{-1} P^* - Q) u_2, u_2\rangle - \frac{1}{2}\langle PR^{-1} f_b, u_2\rangle -$$

$$- \langle f_a, u_2\rangle - \frac{1}{2}\langle R^{-1} f_b, f_b\rangle. \tag{7'}$$

The stationarity condition for $G(u_2)$ is

$$\frac{\partial G}{\partial u_2} = (PR^{-1} P^* - Q) u_2 - PR^{-1} f_b - f_a = 0, \tag{8'}$$

which is precisely the second condition for the stationarity of $P(w)$

If, in addition,

$$PR^{-1} P - Q = D_2 < 0 \text{ (negative definite)}$$

then w_0 is a *maximum point*, i.e.

$$G(u_2) > G(u_0) = I(u_0, v_0). \tag{9'}$$

If we simultaneously have

$$D_1 > 0 \text{ and } D_2 < 0, \tag{10}$$

then

$$G(u_2) \leqslant G(u_0) = I(u_0, v_0) = J(v_0) < J(v_1). \tag{10}$$

The inequalities (10) hold if

$$Q > 0 \text{ and } R < 0.$$

We remark that the complementary conditions pertaining the positivity and negativity with respect to Q and R stems from the fact that $e(w)$ is expressed through the difference of two operators A and B, so that the two complementary conditions give the conditions for a global extremum.

4. Examples

a. *The wave equation*

If we take the operators

$$P = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad Q = 1, R = -\Delta \text{ (the Laplace operator)}$$

we get the wave equation for v. It is the example 3 from [1].

b. *The Schrodinger equation*

If we take operators

$P = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, $Q = R = \mathbf{H}$ (a real valued selfadjoint operator) we get the Schrodinger equation

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{H}\varphi,$$

where $\varphi = u + jv$. It is the example 4 from [1].

We call attention upon the fact that the examples 1 and 2 from [1] cannot be included in the theory of power stationarity since the operator *curl* (the rotational of a vector) is not a selfadjoint one but a skew adjoint one. One must use the double curl expressed as

$$curl\ curl = grad\ div - \Delta$$

c. *Hyperbolic systems*

We consider the following system of equations

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -M(\nabla)\psi + f_1,$$

$$B\frac{\partial \psi}{\partial t} = -M^T(\nabla)\varphi + f_2,$$

where A and B are positive self adjoint operators and M is a linear form on nabla operator. For details see [2].

We further obtain the following equivalent equations for each of the functions φ and ψ:

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = M(\nabla) B^{-1} M^T(\nabla)\varphi - M(\nabla) B^{-1} f_2 + f_1 \tag{11}$$

and

$$B \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = M^T(\nabla) A^{-1} M(\nabla)\psi - M^T(\nabla) A^{-1} f_1 + f_2 \tag{12}$$

The equations can be put in the form (1) if we take

— for the equation (11)

$$P = A^{1/2} \frac{\partial}{\partial t}, Q = 1, R = -M(\nabla) B^{-1} M^T(\nabla),$$

$$f_a = 0, \; f_b = M(\nabla) B^{-1} f_2 - f_1;$$

— for the equation (12)

$$P = B^{1/2} \frac{\partial}{\partial t}, Q = 1, R = -M^T(\nabla) A^{-1} M(\nabla),$$

$$f_a = 0, \; f_b = M^T(\nabla) A^{-1} f_1 - f_2.$$

5. Conclusions and discussions

We have presented the power stationarity principle. It includes a large class of problems but the operators entering the equations must be self adjoint and in addition boundary conditions must be homogeneous, zero boundary conditions. There is a class of problems where the nonzero boundary conditions necessarily occur. For such problems we have elaborated a stationary principle for the class of systems which can be described by (11) or (12).

REFERENCES

1. *N. Andreson, A. M. Arthurs*, Variational principles for a class of coupled linear equations Journ. of Math. Anal. and Appl., Vol. 90, pp. 555—562 (1982).
2. *D. Stanomir*, Hyperbolic systems. Adjointness and boundary conditions. Rév. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., tome 27, nr. 1, p. 63—70, Bucharest, 1982.
3. *M. M. Vainberg*, Variational methods for the study of nonlinear operators. Holden Day, San Francisco, 1963.

Principii variaționale. Formularea prin staționaritatea puterii

În lucrare este prezentat și discutat un principiu variațional, formulat de Anderson și Arthurs. Se arată că sistemele hiperbolice introduse de autor se încadrează în formularea de staționaritate. Totodată se subliniază că o serie de exemple date în lucrarea inițială a celor doi autori nu se încadrează în teoria dezvoltată. În același timp principiul de staționaritate nu permite includerea unor condiții la limită pe frontiera domeniului. Într-o lucrare viitoare va fi prezentat un principiu variațional pentru sisteme hiperbolice, principiu care permite includerea condițiilor la limită.

CZ : 621.396.6 : 512.831

GENERAREA FĂRĂ REPETIȚII A ARBORILOR DINTR-UN GRAF PRINTR-O TEHNICĂ DE CALCUL CU MATRICE RARE

M. IORDACHE, LUCIA DUMITRIU, C. MIERLEA, M. GEORGESCU*

În lucrare se prezintă o metodă de generare fără repetiții a tuturor arborilor dintr-un graf conex, pornind de la un arbore de referință inițial și de la coarborele acestuia. Metoda se bazează pe transformări elementare în liniile 2 și 3 ale matricei de descriere a grafului, ce conțin numai elementele nenule din matricea de incidență laturi-noduri, înlocuite cu indicele nodului inițial respectiv final, al laturii corespunzătoare.

Lucrarea prezintă o metodă de generare fără repetiții a tuturor arborilor dintr-un graf conex $\mathcal{G}$, pornind de la un arbore de referință inițial $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{G}$, ales arbitrar în graf, și de la coarborele acestuia $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}\,\mathcal{A}_0$. Metoda se bazează pe transformări elementare în liniile 2 și 3 ale matricei de descriere a grafului (MDG), matrice care conține pe aceste linii numai elementele nenule din matricea de incidență laturi-noduri C_{nl} și în care elementele ± 1 din C_{nl} sînt înlocuite cu indicele nodului inițial și respectiv nodului final al laturii corespunzătoare.

Față de metodele de generare a arborilor dintr-un graf, existente în literatură [1 — 6], metoda propusă conduce la o importantă economie de memorie și o substanțială reducere a timpului de calcul. În lucrare se enunță și se demonstrează două teoreme: prima teoremă arată că prin metoda propusă se generează toți arborii din graf, iar a doua teoremă arată că fiecare arbore se generează o singură dată.

1. Introducere

În determinarea simbolică sau parțial simbolică a funcțiilor de rețea și în calculul sensitivităților [3, 6], cea mai laborioasă parte o constituie generarea arborilor sau coarborilor din grafurile asociate circuitelor analizate.

Cele mai uzuale metode de generare fără repetiție a arborilor (coarborilor) sînt cele iterative, care au la bază efectuarea unor „transformări elementare" prin care se determină un arbore din alt arbore [3, 4], respectiv modificarea matricelor de incidență laturi — secțiuni (sau laturi — noduri) [3], sau a matricelor incidențelor esențiale (*MIE*) [3, 4], prin operații elementare pe linii și coloane.

* Șef lucrări dr. ing.; Asist. ing., catedra Electrotehnică

Pentru descrierea grafului se utilizează o matrice-numită matrice de descriere a grafului (MDG) — formată din trei linii și l coloane (l fiind numărul laturilor grafului).

Fiecare coloană a MDG este formată, în ordine, din : indicele laturii, nodul inițial și nodul final. Evident, dacă numerotarea laturilor este cea naturală, atunci prima linie a MDG este superficială și liniile ei se reduc la două.

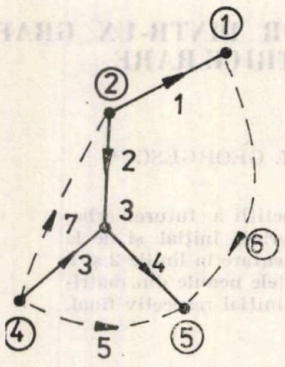


Fig. 1 — Schema grafului

În acest caz, MDG conține elementele nenule ale matricei de incidență laturi — noduri în care elementele $+1$ și -1 sînt înlocuite cu indicele nodului inițial și respectiv nodului final al laturii respective.

De exemplu, pentru graful conex reprezentat în figura 1, matricea de descriere are următoarea structură.

$$MDG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

2. Descrierea metodei

Se pornește de la un arbore de referință inițial $\mathscr{A}_0 \in \mathscr{G}$, ales arbitrar în graf și de la coarborele acestuia $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_{\mathscr{G}} \mathscr{A}_0$. De exemplu, pentru graful din figura 1, $\mathscr{A}_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ și $C_0 = \{5, 6, 7\}$. Se alege o ordine arbitrară $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ pentru ramurile arborelui $\mathscr{A}_0$, unde n este numărul nodurilor grafului $\mathscr{G}$, iar pentru coardele coarborelui $\mathscr{C}_0$ se alege o altă ordine arbitrară $c_1, c_2, \ldots, c_b$ cu b, numărul de coarde ale lui $\mathscr{C}_0$ (identic cu numărul buclelor unui sistem fundamental de bucle independente ale grafului $\mathscr{G}$).

Procedeul de generare fără repetiție a arborilor constă în generarea pe rînd a mulțimii de arbori $A_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk}}$, care conțin toți arborii din $\mathscr{G}$ care au printre ramurile lor coardele $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots c_{jk}$, din $\mathscr{C}_0$, și nu au ca ramuri celelalte coarde din $\mathscr{C}_0$, pentru toate combinările $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots c_{ik}$, de k coarde din cele b coarde ale lui $\mathscr{C}_0$, $k = 1, 2 \ldots b$, în ordinea obișnuită : $c_1, c_2, \ldots, c_{b-1}, c_b$; $c_1c_2, c_1c_3, \ldots, c_{b-1}c_b$; $c_1c_2c_2, c_1c_2c_4, \ldots$, $c_{b-2}c_{b-1}c_b$; $\ldots$; $c_1c_2 \ldots c_b$.

Mulțimea de arbori $A_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{k,j}}$ de distanță $k \leqslant \min(n-1, b)$ față de arborele de referință inițial $\mathscr{A}_0$, se generează din mulțimea de arbori $A_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk-1}}$, de distanță $k-1$ în raport cu $\mathscr{A}_0$. Pentru aceasta, primul pas constă în adăugarea coardei c_{jk} fiecărui arbore din mulțimea $A_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk-1}}$. Mai exact, în acest prim pas, pentru fiecare arbore $\mathscr{A}^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk-1}}$, prin adăugarea coardei c_{jk} se formează subgraful $S^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk}} = \mathscr{A}^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk-1}} \cup \{c_{jk}\}$ care conține o singură buclă $B^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk}}$. Al doilea pas constă în generarea unui arbore $\mathscr{A}^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk}}$ din mulțimea de arbori $A_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk}}$, prin deschiderea buclei $B^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk}}$, eliminînd din ea o ramură r_{ih} ce aparține lui $\mathscr{A}_0$. Arborele $\mathscr{A}^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk}}$ are ca predecesor (proxim) arborele $\mathscr{A}^i_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{jk-1}}$ și ca

predecesor secund arborele $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_{k-1}}}$, predecesor prim al lui $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_{k-1}}}$ etc. Ca urmare arborele $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$ este un *descendent* al arborilor

$$\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_{k-1}}},\quad \mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2},\ldots,c_{j_{k-1}}}\quad \mathscr{A}^i_{c_{j_1}}.$$

Ramura eliminată $r_{ih} \in \mathscr{B}^i_{c_{j_2}c_{j_3}\ldots c_{jk}} \cap \{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\}$, nu face parte din *mulțimea de restricție* $RS^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$ a subgrafului $S^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$, identică cu mulțimea de restricție a arborelui $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$.

Mulțimea de restricție a arborelui $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$ este prin definiție reuniunea mulțimii de restricție $RS^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$ a subgrafului $S^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$, din care se obține prin eliminarea ramurii r_{ih}, din bucla $B^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$, cu mulțimea ramurilor $\mathscr{A}_0$, care se află în această buclă și care preced ramura r_{ih} în ordinea ramurilor din $\mathscr{A}_0$. Prin definiție mulțimea de restricție a arborelui de referință inițial $\mathscr{A}_0$ este mulțimea vidă.

De fapt, mulțimea de restricție a unui arbore oarecare $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$ reprezintă mulțimea tuturor ramurilor din $\mathscr{A}_0$ care au fost substituite de coardele din $\mathscr{C}_0$, pentru a obține toți arborii predecesori arborelui $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_k}}$ și mulțimea ramurilor care aparțin buclei din care s-a generat arborele respectiv, prin substituirea ramurii r_{ih}, și care preced ramura r_{rh} în ordinea ramurilor din $\mathscr{A}_0(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$. În figura 2 numerele încadrate în □ reprezintă numerele curente ale arborilor generați, iar mulțimea de restricție a fiecărui arbore este formată din ramurile din A_0 tăiate cu linie punctată oblică. De exemplu, arborele cu numărul de ordine $\boxed{22}$ are mulțimea de restricție formată din ramurile $\{1, 2\}$.

Algoritmul de generare fără repetiție a tuturor arborilor unui graf conex $\mathscr{G}$ prin generarea ordonată a buclelor și deschiderea lor ordonată descris în figura 2, pentru graful orientat din figura 1, se realizează astfel :

1. Se determină un arbore $\mathscr{A}_0$ al grafului $\mathscr{G}$, care se consideră arbore de referință inițial. Pentru exemplul considerat $\mathscr{A}_0 = \{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ și $\mathscr{C}_0 = \{c_5, c_2, c_2\} = \{5, 6, 7\}$.

2. Se alege o ordine $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ pentru ramurile lui $\mathscr{A}_0$ și o ordine $c_1, c_2, \ldots, c_b$ pentru coardele coarborelui $\mathscr{C}_0$ al lui $\mathscr{A}_0$. În cazul grafului din figura 1, ordinea ramurilor din $\mathscr{A}_0$ și a coardelor din $\mathscr{C}_0$ este cea naturală.

3. Se generează pe rînd arborii din mulțimile $A_{c_1}, A_{c_2}, \ldots, A_{c_b}$. Pentru aceasta se efectuează următorii pași :

3.1. „*Primul pas*" *de formare a subgrafului* $S^1_{c_1}$. Se adaugă coarda c_1 la arborele $\mathscr{A}_0$ și se generează astfel subgraful $S^1_{c_1} = \mathscr{A}_0 \cup \{c_1\}$ cu bucla $B^1_{c_1}$ și restricția $RS^1_{c_1} = \{\emptyset\}$.

3.2. „*Pașii secunzi*" *de generare a arborilor mulțimii* A_{c_1}. Se substituie pe rînd în $\mathscr{A}_0$ cîte o ramură din bucla $B^1_{c_1}$, începînd cu ramura din buclă care are numărul de ordine cel mai mic în ordinea $(r_1, r_2, \ldots r_{n-1})$, cu coarda c_1 obținîndu-se astfel arborii $\mathscr{A}^{11}_{c_1}$ din mulțimea A_{c_1} și restricțiile lor.

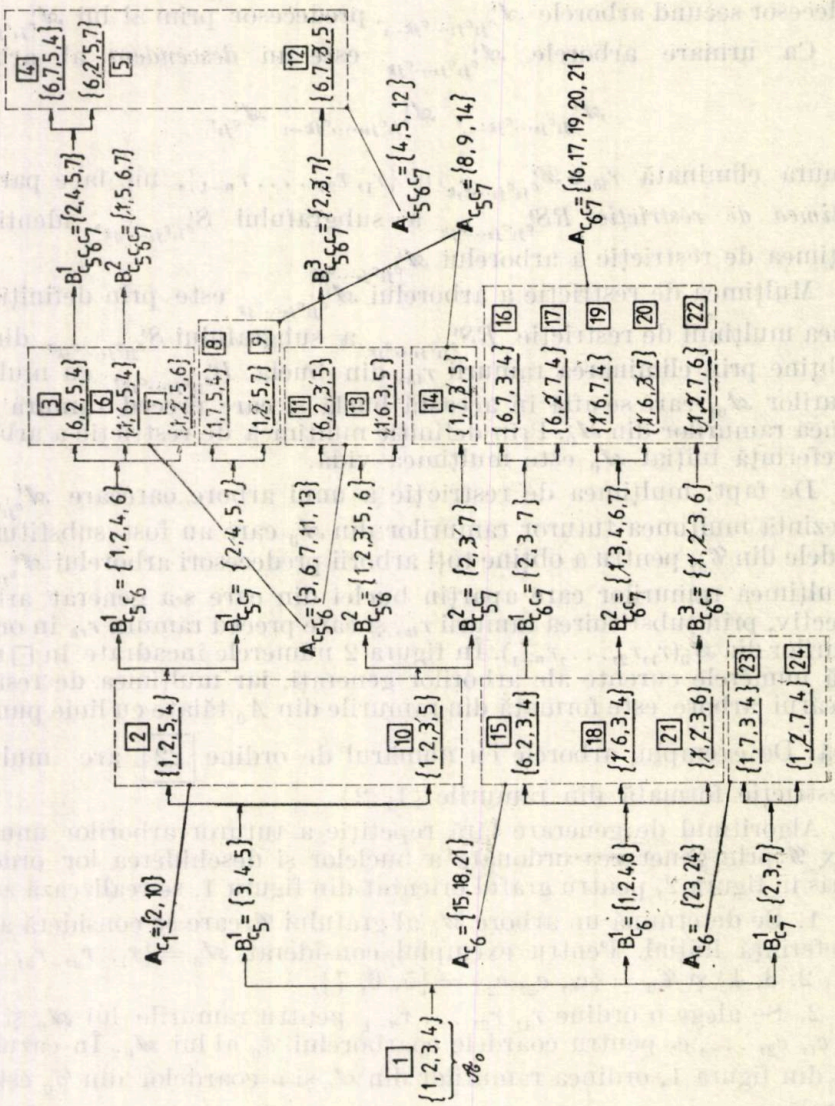


Fig. 2 — Descrierea algoritmului de generare a arborilor

Restricția fiecăruia din acești arbori este formată din ramurile lui $\mathscr{A}_0$ care aparțin buclei B_{c_1} și care au numere de ordine mai mici decît numărul de ordine al ramurii eliminate.

Se repetă „primul pas" și „pașii secunzi" pînă cînd se generează toți arborii mulțimilor $A_{c_1}, A_{c_1}, \ldots, A_{c_b}$.

4. Se generează pe rînd arborii mulțimilor $A_{c_1c_2}, A_{c_1c_3}, \ldots, A_{c_1c_b}$; $A_{c_2c_3}, \ldots, A_{c_2c_b}$; $\ldots$; $A_{c_{b-1}c_b}$.

4.1. *„Primul pas" de generare a subgrafului* $S^1_{c_1c_1}$.

Se adaugă la arborele $\mathscr{A}^1_{c_1}$ coarda c_2 și se formează subgraful $S^1_{c_1c_2}$ cu bucla $B^1_{c_1c_2}$ și restricția sa $RS^1_{c_1c_2}$ identică cu restricția arborelui $\mathscr{A}^1_{c_1c_2}$.

4.2. *„Pașii secunzi" de generare a arborilor mulțimii* $A_{c_1c_2}$.

Aceștia se obțin din subgraful $S^1_{c_1c_2}$ deschizînd bucla sa $B^1_{c_1c_2}$ prin cîte una din ramurile acesteia care nu face parte din restricția subgrafului $S^1_{c_1c_2}$, sau substituind pe rînd aceste ramuri din $\mathscr{A}_0$ în arborele $\mathscr{A}^1_{c_1}$, prim predecesor al arborilor $\mathscr{A}^1_{c_1c_2}$, cu coarda c_2.

„Primul pas" și „pașii secunzi" se repetă pentru toți ceilalți arbori din A_{c_1}, respectiv pentru toate subgrafurile lor, prin adăugarea coardei c_2. Apoi se trece la generarea arborilor din mulțimile $A_{c_1c_3}, \ldots, A_{c_1c_b}$; $A_{c_2c_3}, \ldots, A_{c_2c_b}; \ldots, A_{c_{b-1}c_b}$.

5. Se generează pe rînd arborii din mulțimile:

$A_{c_1c_2c_3}, A_{c_1c_2c_4}, \ldots, A_{c_2c_1c_b}; A_{c_2c_3c_4}, \ldots, A_{c_2c_3c_b}; \ldots; A_{c_{b-2}c_{b-1}c_b}$. Procedeul se continuă pînă la generarea arborilor din ultima mulțime de arbori $A_{c_1c_2\ldots c_b}$. Trebuie remarcat faptul că unele din mulțimile de arbori $A_{c_{j_1}c_{j_1}\ldots c_{jk}}$ pot fi vide și în acest caz nu mai este necesar să se considere mulțimile care derivă (succed) din acestea.

Pentru generarea unei bucle oarecare $B^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ se formează mai întîi subgraful $S^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ prin adăugarea coardei c_{jk} arborelui $\mathscr{A}^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk-1}}$ și apoi se elimină din subgraful $S^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ toate laturile care au un nod ce nu mai apare în celelalte coloane (corespunzătoare laturilor neeliminate) ale matricei de descriere asociată subgrafului, $S^i_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$. Eliminarea unei laturi în matricea de descriere se face prin schimbarea semnelor indicilor nodurilor laturii respective. Operațiile de generare a unei bucle se fac numai pe liniile 2 și 3 ale matricei de descriere asociată subgrafului respectiv, așa cum se arată în figura 3 unde este descris algoritmul de generare a buclei $B^1_{c_5} = \{2, 4, 5\}$ obținută din subgraful $S^1_{c_5} = \mathscr{A}_0 \cup \{c_5\}$ în graful reprezentat în figura 1.

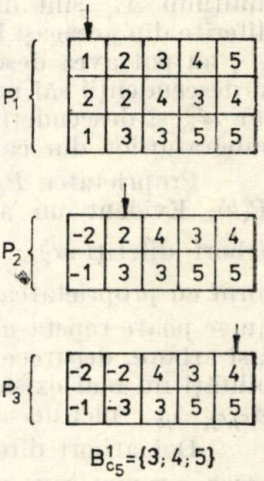


Fig. 3 — Descrierea algoritmului de generare a unei bucle

3. **Teorema 1.** Fie un graf conex $\mathscr{G}$. Aplicînd acestui graf metoda de generare fără repetiții a arborilor prin generarea ordonată a buclelor și spargerea lor ordinată (prezentată în § 2) se generează toți arborii din graf.

Demonstrație. Fie $\mathscr{A}$ un arbore oarecare al grafului $\mathscr{G}$. Arborele $\mathscr{A}$ are fiecare ramură a sa conținută fie în arborele de referință inițiail $\mathscr{A}_0$, fie în coarborele acestuia $\mathscr{C}_0$. Fie $C = \{c_{i_1}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}\}$ mulțimea laturilor din $\mathscr{A}$ care sînt coarde din $\mathscr{C}_0$ ordonate în ordinea coardelor din $\mathscr{C}_0$. Fie $D = \{r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots r_{k_p}\}$ mulțimea ramurilor din $\mathscr{A}_0$ care nu sînt laturi ale lui $\mathscr{A}$. Arborele $\mathscr{A}$ se poate genera prin metoda descrisă mai sus, astfel:

P_1. La arborele A_0 se adaugă prima coardă c_{i_1} din mulțimea C, generîndu-se subgraful S_1. Se substituie în $\mathscr{A}_0$ coarda cu cel mai mic ordin din D și care se află în bucla din S_1, cu coarda c_{i_1}. (Aceasta e totdeauna posibil deoarece nu există bucle alcătuite numai din laturi ale lui $\mathscr{A}$) Arborele $\mathscr{A}_1$, astfel generat, nu conține în restricția lui nici o ramură din D.

P_2. La arborele $\mathscr{A}_1$ se adaugă coarda c_{i_1} formîndu-se subgraful S_2. Subgraful S_2 nu are ca restricție nici o latură din D. Se selectează din bucla formată în S_2 latura $r_{p_2} \in D$ cu cel mai mic număr de ordine.

Se substituie în $\mathscr{A}_1$ ramura r_{p_2}, care nu este conținută în restricția lui S_2, cu coarda c_{i_2}. (Ceea ce este totdeauna posibil deoarece bucla nu poate conține numai laturi din $\mathscr{A}$). Procedeul se continuă pînă la pasul P_p cînd se adaugă ultima coardă c_{ip} și se elimină ultima ramură din D. obținîndu-se astfel arborele $\mathscr{A}$.

Pașii procedeului P sînt toți realizați în aplicarea metodei buclelor grafului $\mathscr{G}$ deoarece : a) coardele din C se adaugă în ordinea coardelor utilizate în această metodă ;

b) ramurile din D, eliminate prin substituirea lor cu coardele din C, nu aparțin restricției subgrafului care conține bucla respectivă. Deci arborele A este unul din arborii generați prin aplicarea metodei buclelor și cum arborele A este un arbore oarecare din $\mathscr{G}$, teorema 1 este demonstrată.

4. *Teorema* 2. Metoda buclelor, aplicată unui graf conex $\mathscr{G}$, generează o singură dată (fără repetiții) fiecare arbore al acestuia.

Demonstrație. Se folosește metoda inducției complete.

Proprietatea $P(k)$. Arborii mulțimii $A_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ sînt distincți și nu au descendenți comuni.

Proprietatea $P(k)$ este adevărată pentru $k = 2$, deoarece : a) arborii mulțimii A_{c_1} sînt distincți, fiind generați prin substituirea unei laturi diferite din aceaeași buclă cu coarda c_1 ; b) doi arbori $\mathscr{A}^{\alpha}_{c_1}$, $\mathscr{A}^{\beta}_{c_1}$, ai mulțimii A_{c_1} nu pot avea descendenți comuni, deoarece dacă $\alpha < \beta$, arborele $\mathscr{A}^{\alpha}_{c_1}$ și descendenții săi nu conțin latura eliminată din buclă la generarea lui, iar $\mathscr{A}^{\beta}_{c_1}$ și descendeții săi conțin această latură, ea aparținînd restricției subgrafurilor din care sînt generați.

Proprietatea $P_{(k+1)}$ este adevărată dacă este adevărată proprietatea $P(k)$. Evident un același arbore $\mathscr{A}^{\alpha}_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ nu se poate genera din doi arbori diferiți $\mathscr{A}^{\beta}_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j-k}}$ și $\mathscr{A}^{\gamma}_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk-1}}$, deoarece aceștia nu au, conform cu proprietatea $P(k)$, descendenți comuni. Același arbore $\mathscr{A}^{\alpha}_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ nu se poate repeta nici la generarea descendenților proximi dintr-un același arbore, deoarece acești descendenți sînt diferiți. Pentru că alte posibilități nu mai există, în procesul de generare a arborilor din mulțimea $A_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ nici un arbore nu se generează de mai multe ori.

Doi arbori diferiți $\mathscr{A}^{\alpha}_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ și $\mathscr{A}^{\beta}_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk}}$ pot avea același predecesor proxim sau pot avea predecesori proximi diferiți (doi arbori diferiți din $\mathscr{A}_{c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{jk-1}}$). În nici una din aceste două situații, arborii $\mathscr{A}^{\alpha}_{c_{j_1}\ldots c_{jk}}$ și $\mathscr{A}^{\beta}_{c_{j_1}\ldots c_{jk}}$ nu pot avea descendenți comuni. În prima situație, pentru că descendenții lor conțin ramuri diferite ale arborelui din care s-au obținut (punctul b de la P_2). În a doua situație, deoarece descendenții

comuni ai lui $\mathscr{A}^{\alpha}_{c_{j_1}\ldots c_{j_k}}$ și $\mathscr{A}^{\beta}_{c_{j_1}\ldots c_{j_k}}$ sînt și descendenți comuni ai arborilor lor predecesori proximi, însă aceasta nu e posibil (deoarece predecesorii proximi sînt arbori ai mulțimii $\mathscr{A}_{c_{j_1}\ldots c_{j_{k-1}}}$ care prin ipoteză nu au descendenți comuni).

Deci, prin inducție completă rezultă că proprietatea $P(k)$ este valabilă pentru orice $k \geqslant 2$.

Prin urmare, arborii generați cu metoda prezentată în paragraful 2, dintr-o aceeași mulțime $\mathscr{A}_{c_{j_1}\ldots c_{j_k}}$ sînt distincți. Arborii din mulțimi diferite $A_{c_{j_1}\ldots c_{j_k}}$ și $A_{c_{j_1}\ldots c_{j_k}}$ sînt și ei diferiți deoarece conțin coarde diferite din $\mathscr{C}_0$. Cele de mai sus demonstrează teorema 2.

5. Implementare

Metoda descrisă mai sus a condus la realizarea unui program destinat generării fără repetiții a tuturor arborilor dintr-un graf specificat prin matricea sa de descriere (*MDG*).

Din motive de compatibilitate cu alte module scrise anterior și pentru eventuale dezvoltări ulterioare, precum și din motive de portabilitate, programul a fost implementat în limbajul FORTRAN. A fost necesară simularea unui mecanism de recursivitate prin utilizarea unei stive, ceea ce a condus la obținerea unui program compact și în același timp ușor de urmărit. Timpul de execuție poate deveni critic doar în cazul unor grafuri de dimensiuni mari (zeci de noduri și multe laturi), ținînd cont de numărul mare de arbori existenți (de ordinul sutelor de mii).

6. Concluzii

Lucrarea prezintă o nouă metodă de generare fără repetiții a tuturor arborilor dintr-un graf conex dat. Se pleacă de la un arbore inițial de referință A_0, arbitrar ales în graf, și de la coarbele său C_0. Metoda se bazează pe transformări elementare în liniile 2 și 3 ale matricei de descriere a grafului (*MDG*). *MDG* conține pe liniile 2 și 3 numai elementele nenule ale matricei de incidență laturi-noduri, în care elementele ± 1 din această matrice sînt înlocuite cu indicele nodului inițial și respectiv final al laturii corespunzătoare. Prin aceasta, față de metodele de generare a arborilor existente în literatură [1 — 6], metoda propusă conduce la o importantă economie de memorie și la o reducere substanțială a timpului de calcul.

Programul de generare a tuturor arborilor dintr-un graf dat, care are la bază metoda prezentată în lucrare, devine un instrument deosebit de eficient în calculul simbolic sau parțial simbolic al funcțiilor de rețea și al sensitivităților, generînd zeci de mii de arbori într-un interval de timp relativ scurt, de ordinul 1—2 ore.

Cele două teoreme expuse și demonstrate în lucrare asigură că prin metoda propusă se generează toți arborii din graf și că fiecare arbore se generează o singură dată.

BIBLIOGRAFIE

1. *W. Mayeda, S. Seshu*, Generation of Trees without Duplications, IEEE Trans. Circuit Theory, CT—12, pp. 181—185, 1965.
2. *W. Mayeda, S.L. Hakimi, K. W. Chen., N. Deo*, Generation of Complete Trees, IEEE Trans. Circuit Theory, CT—15, pp. 101—105, 1968.
3. *L. O. Chua, P. M. Lin*, Computer — aided Analysis of Electric Circuits : Algorithms and Computational Techniques, Englewood Cliffs, H.J : Prentice — Hall, 1975.
4. *M. Preda, P. Cristea, I. Dorobanțu*, Analiza topologică acircuitelor electrice, Editura tehnică București, 1979.
5. *M. Iordache, Vl. Socaciu*, A method for Tree Generation without Duplication, Rev. Roum. Sci. Techn., Électrotechn. et Énerg., 1, pp. 55—62, 1981.
6. *W. Chen*, Applied Graph Theory, Amsterdam : North — Holland Publishing Company 1971.

Generation without Duplication of All Trees in a Conex Graph

The paper presents a method for generation without duplication of all trees in a conex graph considering an initial reference tree and his cotree. The method is based on the elementary transformations in the rows 2 and 3 of the graph's description matrix. These rows contain only the nonzero elements of the incidence matrix, which were replaced by the initial respectively final node's indices of the corresponding branch.

C.Z.: 537.212.00124

INFLUENȚA SOLICITĂRILOR MECANICE ASUPRA STRĂPUNGERII DIELECTRICILOR TERMORIGIZI

P. NOȚINGHER*

În cadrul lucrării se prezintă factorii principali care contribuie la inițierea arborescențelor în polimeri termorigizi aflați în cîmpuri electrice intense produse cu electrozi ac-plan. Se analizează, în detaliu, rolul solicitărilor mecanice externe și interne (datorate electrozilor ac) asupra formării canalelor inițiale, precum și influența presiunii gazelor asupra producerii unor rețele de canale neconductoare — în cazul electrozilor aderenți.

1. Introducere

Teoriile generale ale străpungerii dielectricilor se referă, îndeosebi, la medii ideale (omogene și izotrope) și cîmpuri electrice uniforme și constante în timp. În cadrul acestor teorii se determină valoarea critică a intensității cîmpului electric E_c (sau a tensiunii U_c) la care se produce o instabilitate electronică sau o catastrofă termică în masa corpului (prin care se generează un mare număr de purtători de sarcină) [1], ... [3].

În cazul dielectricilor reali (neomogeni și anizotropi), aflați în cîmpuri electrice neuniforme și variabile în timp, procesul de străpungere este mult mai complex, elaborarea unor teorii generale fiind, practic, foarte dificil de realizat. S-au efectuat însă o serie de cercetări privind străpungerea acestor dielectrici în cîmpuri electrice foarte intense și puternic neuniforme — produse cu electrozi cu raze de curbură reduse (ac — ac[4], ac — cilindru [5], ac — plan [6], sferă — plan [7], sferă — sferă [8] etc.) — sau prin bombardarea cu electroni lenți (corespunzători descărcărilor parțiale [9], iradierilor [5] etc.). În cadrul experiențelor realizate — pe diferite tipuri de izolanți solizi — s-a observat că dezvoltarea canalelor de străpungere este, în general, precedată de apariția unor rețele de canale slab conductoare numite arborescențe [5].

Inițierea arborescențelor este legată de existența sau apariția unor canale inițiale; odată inițiate, arborescențele se dezvoltă — cu viteze variabile — dinspre zonele în care cîmpul electric este mai intens spre zonele în care cîmpul este mai slab, provocînd străpungerea dielectricilor [10]. Duratele relativ mari de inițiere și de dezvoltare a canalelor (față de cele determinate în cadrul teoriilor generale), precum și dezvoltarea discontinuă a arborescențelor, au condus la elaborarea mai multor modele (macroscopice) de străpungere a dielectricilor solizi (Bolton [11], Goffaux [12], Noțingher [13], Noțingher și Ifrim [14] etc.).

Modelul termic prezentat în [13] se referă la străpungerea dielectricilor neomogeni aflați în cîmpuri electrice puternic neuniforme produse de electrozi ac — plan. Se consideră că, la vîrful acului, se află o cavitate parabolică, iar formarea canalului de străpungere se explică prin fracturarea termică a moleculelor dielectricului (datorită descărcărilor parțiale și efectului Joule).

Modelul sarcinii spațiale prezentat în [14] se referă la dielectrici omogeni, electrozi aderenți (fără cavități la vîrfurile acelor) și cîmpuri electrice armonice. Formarea canalelor inițiale este legată de deplasarea sarcinii injectate de electrozii ac, modelul corespunzînd îndeosebi, configurațiilor pentru care barierele de potențial metal-dielectric sînt relativ înguste.

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mașini electrice

În cele ce urmează se analizează rolul solicitărilor mecanice statice şi dinamice asupra iniţierii arborescenţelor în polimeri termorigizi aflaţi în cîmpuri intense produse cu electrozi ac-plan.

2. Iniţierea arborescenţelor

În cazul electrozilor ac-plan, iniţierea canalelor de străpungere (deci, şi a arborescenţelor) se datorează, în principal, acţiunii simple sau combinate a trei factori importanţi : sarcina electrică injectată de electrodul ac, descărcările parţiale produse în cavităţile interne şi/sau în cele din zonele de contact ac-izolant şi solicitările mecanice (corespunzătoare acelor, cîmpului electric, gazelor din cavităţi, tensiunilor mecanice interne şi externe etc.).

Procesul de iniţiere a unui canal cuprinde două faze distincte : incubaţia şi iniţierea propriu-zisă [15]. În faza de incubaţie se produc, local, acumulări de energie necesară generării unui defect de volum (crater, fisură etc.) de dimensiuni suficient de mari, astfel încît, descărcările electrice care se produc în interiorul acestuia să transmită dielectricului, în unitatea de timp, o energie de valoare superioară valorii energiei transmise de dielectric mediului ambiant [13]. În această situaţie, descărcările parţiale sînt suficient de intense pentru a putea fi detectate şi, eventual, măsurate cu mijloace uzuale [16].

Iniţierea propriu-zisă corespunde formării propriu-zise a unui defect de volum, respectiv a canalului iniţial (piciorul arborescenţei). Durata de iniţiere a canalului de străpungere (a arborescenţei) t_i reprezintă suma dintre durata de incubaţie şi durata de iniţiere propriu-zisă. (fig. 1).

2.1. *Influenţa sarcinii spaţiale*

Sarcina electrică injectată de electrodul ac difuzează în dielectric şi ocupă o zonă de forma unui paraboloid, de volum relativ redus [17]. În cazul cîmpurilor electrice armonice, purtătorii de sarcină efectuează o mişcare oscilatorie şi, datorită ciocnirilor cvasielastice cu reţeaua dielectricului, transmit dielectricului o parte din energia primită de la cîmpul electric. Dacă puterea specifică transmisă dielectricului depăşeşte valoarea critică P_c, într-o zonă din vecinătatea acului, temperatura depăşeşte valoarea critică de fracturare a moleculelor T_c [13], apărînd un microcanal (microcrater) cu gaz.

În interiorul microcanalului se dezvoltă descărcări parţiale de energii şi sarcini foarte reduse, purtătorii de sarcină lovind pereţii acestuia şi pătrunzînd în dielectric. Are loc o creştere locală a temperaturii dielectricului pînă la valoarea T_c la care se produce fracturarea moleculelor şi, în consecinţă, creşterea presiunii gazului din microcanal. Cum şi proprietăţile mecanice ale dielectricului se reduc, iar presiunea gazului atinge valori foarte mari (pînă la 5,5 MN/m^2 [18],[24]), se produce o deformare a pereţilor microcanalului (o creştere a volumului său), respectiv formarea canalului iniţial.

După formarea canalului iniţial, presiunea gazului scade şi descărcările parţiale se înteţesc [19], putînd fi detectate cu mijloace uzuale.

2.2. *Influenţa descărcărilor parţiale*

În cavitatea existentă la vîrful acului se produc descărcări parţiale de intensitate superioară celor produse în microcanalele apărute sub acţiu-

nea sarcinii spațiale (datorită presiunii reduse a gazului). Purtătorii de sarcină pătrund în interiorul dielectricului, transmițîndu-i cea mai mare parte din energia pe care o posedă. Se produce o creștere locală a tempera-

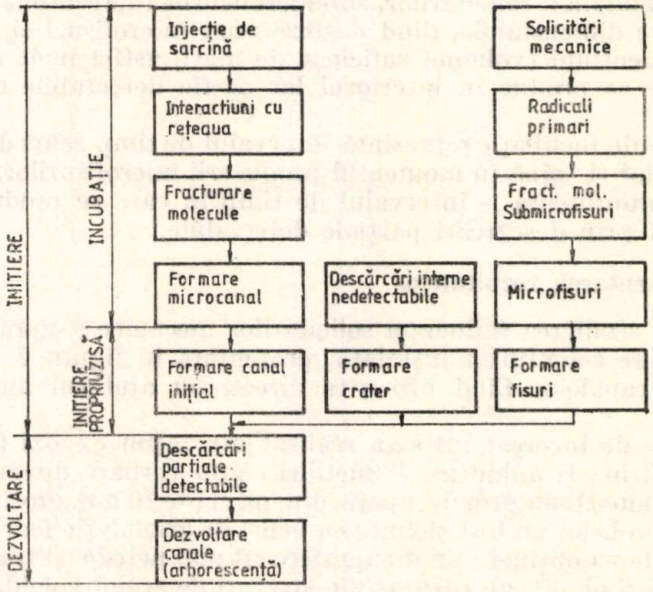


Fig. 1 — Formarea canalelor inițiale și inițierea arborescențelor

turii, într-o zonă $\mathcal{D}$ de forma unui paraboloid cu axa mare suprapusă peste axa de simetrie a ansamblului electrozi-dielectric [13].

Dacă densitatea volumică a puterii transmise dielectricului depășește valoarea critică P_c, după un anumit timp, temperatura atinge în, $\mathcal{D}$, valoarea T_c la care macromoleculele se fracturează. Drept urmare, cavitatea inițială se mărește (cu $\mathcal{D}$), formîndu-se un crater în care se dezvoltă descărcări parțiale de intensitate suficient de mare pentru a fi detectate cu mijloace uzuale (canalul inițial, fig. 1).

2.3. *Influența solicitărilor mecanice*

Solicitările mecanice exercitate asupra polimerilor determină o slăbire a legăturilor inter- și intramoleculare, ceea ce conduce la creșterea probabilității scindării (fracturării) macromoleculelor datorită agitației termice. Efectul acțiunii solicitărilor mecanice se manifestă prin reducerea duratelor de fracturare a moleculelor. Astfel, în cazul unei probe aflate la temperatura T și solicitată monoaxial, durata necesară fracturării (τ) este dată de relația :

$$\tau = \tau_0 \cdot \exp\left[(U_0 - \gamma\sigma)/kT\right],$$

unde U_0 reprezintă energia de activare corespunzătoare unei scindări interatomice, τ_0 — perioada oscilațiilor termice ale atomilor legați, σ-tensiunea mecanic specifică, γ — un coeficient structural care definește forțele reale într-un corp tensionat și k — constanta lui Boltzmann [20].

În urma fracturării moleculelor se produc radicali primari de capăt deosebit de activi, care reacționează (rapid) cu moleculele vecine : extrag

ionii de hidrogen din macromolecule, fracturîndu-le şi, deci, generînd noi radicali. Procesul de scindare continuă, în jurul unui radical primar formîndu-se o microfisură care cuprinde cca. 10^3 molecule fracturate. Sub acţiunea prelungită a solicitărilor, submicrofisurile (detectabile cu radiaţii X) îşi măresc dimensiunile, dînd naştere unor microfisuri şi, apoi, unor fisuri de dimensiuni (volume) suficient de mari, astfel încît descărcările parţiale care se produc în interiorul lor să fie detectabile cu mijloace uzuale.

Durata de incubaţie reprezintă intervalul de timp scurs de la aplicarea solicitărilor şi pînă în momentul producerii microfisurilor, iar durata de iniţiere propriu-zisă — intervalul de timp în care se produc o fisură caracterizată prin descărcări parţiale detectabile.

3. Prezentarea rezultatelor

Pentru studierea influenţei solicitărilor mecanice asupra procesului de străpungere s-a utilizat instalaţia prezentată în figura 2, iniţierea şi dezvoltarea canalelor fiind urmărite direct, cu ajutorul microscopului optic 5.

Probele de încercat (2) s-au realizat din răşini expoxi (Bisfenol + + Epiclorhidrină şi anhidridă trimetilică) prin turnare directă (cu electrodul ac înglobat) sau prin decupare din plăci (de 10 mm grosime). Feţele laterale ale probelor au fost şlefuite cu benzi de granulaţie foarte fină (sub 6 μm), în vederea obţinerii unor suprafeţe cît mai netede (şi transparente).

Electrozii plani s-au realizat din straturi de argint coloidal, iar electrozii ac — din sîrmă de oţel cu diametrul de 1 mm. Acele (cu dublă conicitate) au deschiderea conului mic de 60°, iar raza de rotunjire a vîrfului r — între 3 şi 8 μm. Fixarea acelor s-a realizat — cu ajutorul unui şurub micrometric) —, fie direct (la rece), fie după încălzirea probelor la 130 °C (la cald), fie în răşina nepolimerizată (fluidă). În toate cazurile s-a verificat distanţa dintre electrozi a (a = ... 1,54 mm) cu ajutorul microscopului 5.

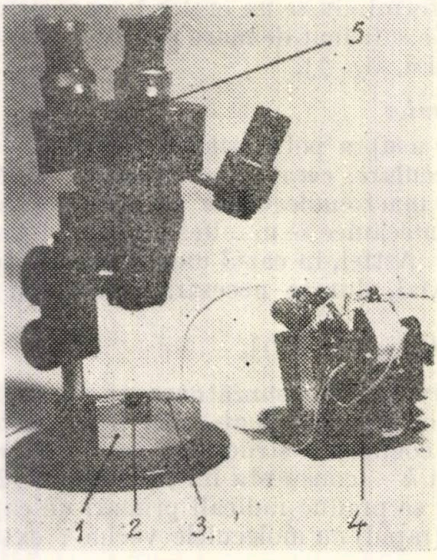


Fig. 2 — Instalaţie pentru producerea şi vizualizarea arborescenţelor: 1 — suport izolant, 2 — probă de încercat, 3 — electrod ac, 4 — sursă de tensiune alternativă reglabilă (U = 0 ... 25 kV, f = = 100 ... 200 kHz) şi 5 — microscop optic.

Doarece, pentru valori ale tensiunii U sub 20 kV, duratele de inițiere a arborescențelor sînt relativ mari ($t > 60$ min.), încercările s-au efectuat pentru $U = 22 \ldots 24$ kV (și $f = 150$ kHz).

3.1. *Influența tensiunilor mecanice produse de electrozii ac*

3.1.1. *Fixarea electrozilor ac în rășina nepolimerizată*

Introducînd acele în rășina fluidă se obține (după polimerizare) o aderență foarte bună a electrozilor la izolant, iar tensiunile mecanice care apar (datorită valorilor diferite ale coeficienților de dilatație a electrozilor și rășinii) sînt prea mici pentru a fractura macromoleculele rășinii. Este cazul electrozilor aderenți, inițierea arborescențelor datorindu-se, în principal, sarcinii injectate de electrozii ac [14].

Pentru a evidenția rolul sarcinii asupra lui t_i, s-au înroșit, la flacără, 5 ace (cu $r = 5$ μm), după care s-au fixat în rășină fluidă. S-a constatat că t_i s-a redus cu 32% (față de cazul acelor netratate termic), ca urmare a reducerii barierei metal-izolant [14].

Urmărind la microscop procesul de inițiere a arborescențelor, se constată că, după un timp t_1 de la aplicarea tensiunii, o zonă foarte redusă de la vîrful acului — de forma unui paraboloid alungit, cu vîrful în jos — capătă o culoare distinctă de cea a izolantului (datorită fracturării moleculelor). În continuare, această zonă se alungește — formînd un crater de lungime l_i — și, după un timp $t_2 < t_1$, la extemitatea sa apare o rețea de canale (o arborescență) (fig. 3).

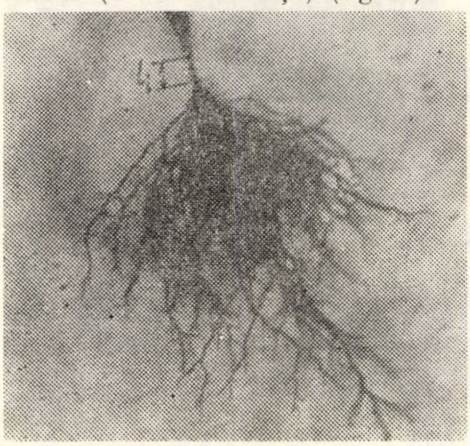


Fig. 3—Arborescență realizată cu electrozi aderenți

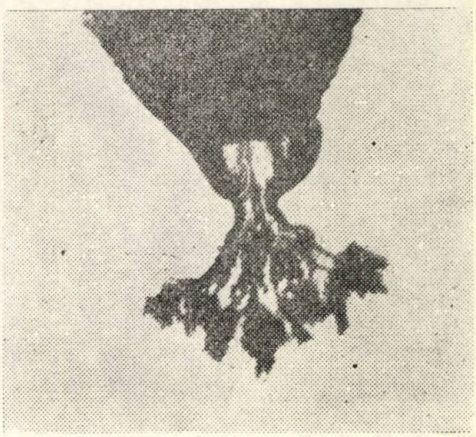


Fig. 4 — Arborescență inițiată dintr-o microcavitate produsă prin introducerea acului la cald (130°C)

3.1.2. *Fixarea electrozilor la cald*

La introducerea acului se produc tensionări mecanice ale dielectricului, iar la vîrful acului apare un crater (o cavitate de formă parabolică). După stabilirea cîmpului electric, în interiorul craterului se dezvoltă descărcări parțiale; drept urmare, moleculele din vecinătatea craterului se fracturează, acesta își mărește volumul, iar gazul din interiorul său — presiunea. Pe de altă parte, purtătorii de sarcină se aglomerează la baza craterului, ceea ce duce la creșterea locală a intensității cîmpului electric.

După un anumit timp se produce o străpungere intrinsecă [1] urmată de o difuzie a gazului în izolant, concretizate prin formarea unei reţele de canale slab conductoare (fig. 4).

3.1.3. *Fixarea electrozilor la rece*

Fixarea „la rece" a electrozilor ac constituie cazul cel mai favorabil străpungerii dielectricilor termorigizi. Acum, zona tensionată mecanic este foarte întinsă (fig. 5), apărînd o serie de microfisuri — atît în vecinătatea vîrfurilor cît şi a porţiunilor conice ale acelor — de volume superioare celor apărute în cazul fixării acelor la cald. După stabilirea cîmpului electric, în aceste microfisuri se dezvoltă descărcări parţiale, macromoleculele se fracturează şi apar cavităţi cu gaze (fig. 6). Din aceste cavităţi se vor forma în continuare, canalele iniţiale şi, apoi, arborescenţele (fig. 7).

Numărul canalelor iniţiale depinde, în mare măsură, de numărul defectelor formate, prin introducerea acului, în zona cu solicitări electrice intense [17]. Astfel, în cazul configuraţiei prezentate în figura 8 au rezultat trei canale iniţiale, din trei fisuri aflate relativ aproape de axa de simetrie a electrozilor.

Dezvoltarea canalelor iniţiale se face din fisurile (craterele) în care solicitările electrice şi termice au valori maxime: este cazul cavităţilor situate în vecinătatea axei de simetrie a electrozilor (fig. 7 şi 8) şi a celor

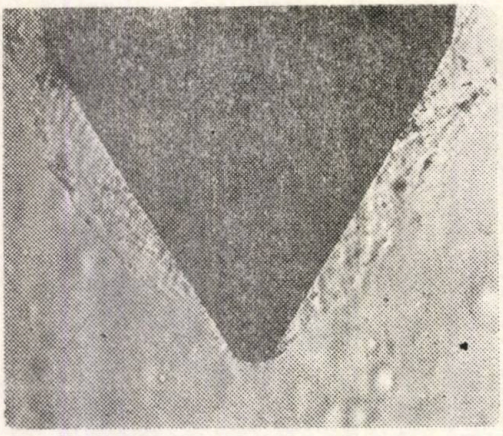


Fig. 5 — Tensionarea mecanică a dielectricului produsă prin introducerea acului la rece

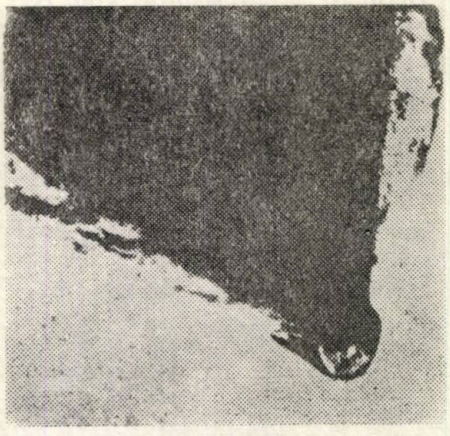


Fig. 6 — Apariţia cavităţilor (cu gaze) în zonele din vecinătatea acului

de volume foarte mari (fig. 9). Evident, arborescenţele se dezvoltă din canalele iniţiale în care solicitările au intensitatea maximă (fig. 10).

Influenţa cavităţilor existente la vîrfurile acelor a fost pusă în evidenţă prin efectuarea unor experienţe în care acele — introduse la cald — au fost îndep rtate de electrozii plani cu 0,4 mm, producîndu-se, astfel, cavităţi cu gaze de presiune redusă. Iniţierea arborescenţelor a avut loc după 15 s de la aplicarea tensiunii ($U = 22$ kV, $a = 2$ mm şi $r = 4$ μm), în timp ce, în cazul electrozilor neîndepărtaţi, duratele de iniţiere au depăşit 20 min.

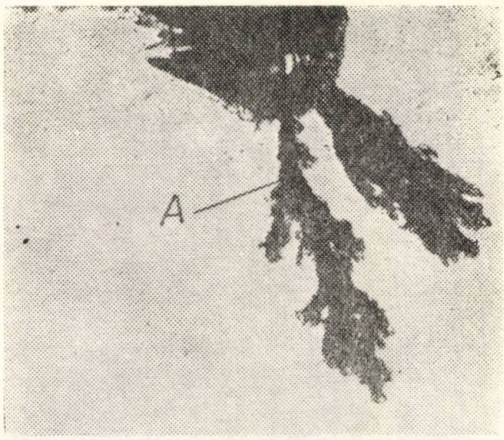


Fig. 7 — Formarea canalelor iniţiale (din cavităţile apărute la vîrful acului)

Fig. 8—Apariţia a trei canale iniţiale din fisurile provocate prin introducerea la rece a acului

Pentru a evidenţia influenţa gazelor asupra iniţierii arborescenţelor, între electrozii ac şi dielectric s-au realizat interstiţii de 0,25 mm grosime. Duratele de iniţiere s-au redus de cca. 6 ori.

Fig. 9—Apariţia canalului iniţial dintr-o fisură laterală, provocată prin introducerea la rece a acului

Fig. 10—Arborescenţă dezvoltată pe întreaga grosime a probei (înainte de străpungerea termică a acesteia): 1 — electrod ac şi 2 — electrod plan (argint coloidal)

3.2. *Influenţa solicitărilor mecanice statice*

Pentru studierea acţiunii solicitărilor mecanice statice s-au realizat 10 probe ($100 \times 10 \times 10$ mm^3), avînd cîte trei ace fixate în răşina fluidă. Probele au fost fixate (încastrate) la un capăt între două bare metalice paralelipipedice — pe o lungime de 55 mm — şi supuse, la celă-

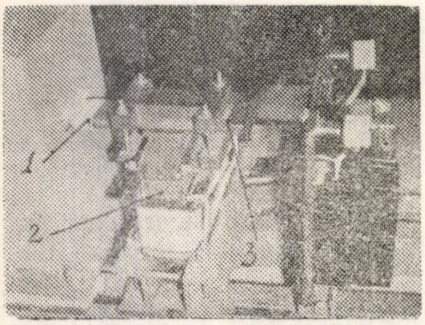


Fig. 11 — Instalaţie pentru producerea vibraţiilor: 1 — probă de încercat 2 — electromagnet de c.a. şi 3 — bară încastrată

Fig. 12 — Canal rezultat în urma străpungerii (termice) complete a dielectricului

lalt capăt, acţiunii unei forţe constante G = 150 N (timp de 8 h). În urma acestor solicitări, duratele de iniţiere t_i s-au redus cu 52% — în cazul acelor situate în apropierea zonei de încastrare — şi cu 19% — în cazul acelor aflate în apropierea capetelor libere ale probelor.

3.3. *Influenţa vibraţiilor*

Pentru producerea vibraţiilor s-a utilizat un electromagnet de c.a., a cărui armătură mobilă a fost fixată de capătul liber al unei bare încastrate (fig. 11). Probele de încercat au fost fixate pe porţiunea liberă a barei — la 10 cm de zona încastrată — şi supuse — 50 cicluri a cîte 8 h — unor vibraţii de amplitudine redusă (0,1 mm la capătul liber al barei, lungimea părţii libere a barei fiind de 50 cm).

În urma solicitărilor la vibraţii, duratele de iniţiere a arborescenţelor s-au redus la toate probele : cu 34% — în cazul probelor cu electrozii fixaţi înaintea solicitărilor — şi cu 9% — în cazul probelor la care electrozii s-au fixat, la cald, după aplicarea lor.

4. Concluzii

a) În cadrul experienţelor efectuate, s-a verificat că străpungerea dielectricilor solizi în cîmpuri electrice intense şi puternic neuniforme (fig. 12) este precedată de apariţia unor reţele de canale slab conductoare, respectiv a arborescenţelor (fig. 10).

b) Iniţierea arborescenţelor este puternic influenţată de modul de fixare a electrozilor ac. Astfel, dacă acele se fixează în răşina nepolimerizată, rezultă un singur canal iniţial; secţiunea acestuia este, în general, redusă, iar durata de iniţiere-relativ mare.

În cazul fixării acului în rășina polimerizată, la cald, se produce o tensionare locală a dielectricului și, eventual, o microcavitate (la vîrful acului). Și în acest caz rezultă un singur canal inițial, dar de secțiune mai mare și cu durată de inițiere mai redusă decît în cazul electrozilor aderenți.

Prin fixarea la rece a acelor, în dielectric se produc o serie de fisuri, din care vor apărea unul sau mai multe canale inițiale (fig. 8 și 9). Duratele de inițiere sînt mai reduse, iar secțiunile canalelor mai mari decît în cazul electrozilor aderenți sau al electrozilor fixați la cald.

c) Secțiunile canalelor sînt foarte mari, iar duratele de inițiere foarte reduse, în cazul producerii unor cavități prin îndepărtarea acelor. Aceasta se datorează nivelului ridicat al descărcărilor parțiale, respectiv valorilor mari ale densității de putere transmise dielectricilor.

d) Apariția unor rețele de canale este strîns legată de presiunea gazelor din cavitățile și canalele inițiale. Dacă între ace și dielectric există interstiții, gazele eșapează în exterior, presiunea în cavități este relativ redusă și descărcările parțiale — intense. Drept urmare, temperatura ia valori mari ($T \geqslant T_c$) într-o zonă mai întinsă și secțiunea canalului crește. Apariția, după un timp t'_i, a unor noi canale, se datorează străpungerilor intrinseci produse ca urmare a aglomerării purtătorilor de sarcină la extremitatea canalului inițial.

În cazul unei aderențe foarte bune a acelor la dielectric, gazele — datorită unei difuzii reduse — își măresc continuu masa și presiunea. Cu creșterea presiunii, scade intensitatea descărcărilor parțiale, dar cresc solicitările mecanice ale gazelor asupra dielectricului. Aceste solicitări provoacă apariția unor microfisuri și, apoi, a unor fisuri în dielectric din care, după un timp t''_i, se dezvoltă o rețea de canale. Evident, fisurile se produc la extremitățile canalelor inițiale — zone în care temperatura are valori mai ridicate și probabilitatea de fracturare a moleculelor este mai mare — iar duratele de inițiere t''_i iau valori superioare valorilor lui t'_i, deoarece energia transmisă dielectricului — în unitatea de timp — este mai redusă.

e) În cazul existenței mai multor canale inițiale, arborescențele se dezvoltă din acelea care transmit dielectricului puterea specifică mai mare. Astfel, în cazul configurațiilor prezentate în figurile 7 și 8, arborescențele se vor dezvolta din canalele A, situate cel mai aproape de axa de simetrie a electrozilor și în care solicitările electrice, termice și mecanice iau valori maxime.

f) Solicitările mecanice statice externe și/sau interne (rezultate în urma turnării) favorizează străpungerea polimerilor termorigizi, prin producerea unor microfisuri în zonele cu solicitări specifice mari. Se explică, astfel, reducerea rigidității dielectrice a maselor plastice presate pe bază de rășini expoxi tensionate mecanic semnalată de Menges și Berg [21] Georgi [12], Bachofen [23] etc.

g) Sub acțiunea vibrațiilor, duratele de inițiere a canalelor de străpungere se reduc. Această reducere este mai importantă în cazul probelor cu electrozii fixați, datorită microcavităților care se produc în zonele de contact ale acelor cu dielectricul.

h) Prin fixarea acelor în probele aflate în starea finală, se produc defecte (necontrolabile) care favorizează străpungerea dielectricilor. Din acest motiv, pentru studierea comportării polimerilor termorigizi în

cîmpuri electrice intense se recomandă utilizarea electrozilor aderenți (fixați în rășina fluidă).

i) În cadrul acestei lucrări nu s-a analizat și modul de dezvoltare a canalelor de străpungere și nici dependența duratelor de străpungere de structura fizico-chimică a probelor, de temperatură etc. Aceste probleme urmează să fie tratate într-o viitoare lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. *J. J. O'Dwyer*, The theory of dielectric breakdown of solids, Clarendon Press, Oxford, 1964
2. *A. Ifrim, P. Notingher*, Materiale electrotehnice, Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
3. *S. Whitehead*, Dielectric breakdown of solids, Clarendon Press, Oxford, 1957.
4. *C. Laurent C. Mayoux*, Analysis of the propagation of electrical treeing using optical and electrical methods, I.E.E.E. Trans. Electr. Insul., 1980, *EI—15*, 1, 33—41.
5. *A. Ifrim, ș.a.*, Producerea accelerată în laborator a arborescențelor în materiale electroizolante sintetice, Lucr. Simp. Naț. de Fiz. Sol., Cluj-Napoca, 1978, 101—103.
6. *E. J. McMahon*, A tutorial on treeing, I.E.E.E. Trans. Electr. Insul., 1978, *EI—13*, 4 277—288.
7. *K. Kutschera*, Foamed plastics used as insulating materials for high voltages, World Electrotechnical Congress, Moscow, Section 3A, Paper 67.
8. *M. Olyphant*, Types of insulation breaksown, Insulation, 1963, *11*, 33—37.
9. *H. Bertein*, Identification d'un critère intrinsèque de tenue des isolants à la tension, R.G.E. 1970, *79*, 4, 497—505.
10. *A. Ifrim, C. Golovanov, P. Notingher*, Le champ électrique dans le domaine de l'initiation des arborescences, Rev. Roum. Sci. Tech. — Electrotechn. et Energ., 1976, *21*, 4, 489—502.
11. *B. Bolton*, The development of discharge channels in perspex under impulse conditions, I.E.E. Conf. on Dielectric Materials, July, 1970.
12. *R. Goffaux*, Sur le mécanisme de perforation des isolants solides et minces plongés dans un champ électrique intense, R.G.É., 1972, *81*, 4, 247—254.
13. *P. Notingher*, On the breakdown mechanism of inhomogeneous solid dielectrics, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ., 1979, *24*, 4, 651—663.
14. *P. Notingher, A. Ifrim*, Influența sarcinii spațiale asupra străpungerii dielectricilor solizi Buletin I.P.B., S. Electrotehnică 1985, *46*, 156—168.
15. *T. Tanaka, A. Greenwood*, Effects of charge injection and extraction on tree initiation in polyethylene, I.E.E.E. Trans. on P.A.S., 1978, *PAS-97*, 5, 1949—1757.
16. *G. H. Kreuger*, Discharge detection in high voltage equipment, Heywood, London, 1964.
17. *A. Ifrim, P. Notingher*, La repartition du champ électrique et de la charge d'espace entre les électrodes pointe-plan, EdF, Paris, 1976, Rapport HM/065/933.
18. *G. Löffelmacher*, Der in teilentladungskanälen in polyäthylen enstehende gasdruck und sein einfluss auf die kanälentwicklung, E.T.Z. —A, 1975, *96*, 3, 152—157.
19. *Bui Ai*, Contribution à l'étude de la dégradation des isolants en feuilles sous l'action de decharges partielles, Thèse, Toulouse, 1966.
20. *S. N. Zhurkov, ș.a.*, Mechanism of submicrocrack generation in stressed polymers, J. of Polymer Science, Part A—2, 1972, *10*, 1509—1520.
21. *G. Menges, H. Berg*, Das verhalten von kunstrtoffisolierungen unter mechanischer beanspruchung, I.H.V.S., Zürich, 1975, 713—718.
22. *A. Georgi*, Rissgefährdung und elektrischer durchschlag in epoxidharzisolierungen, Elektrie, 1978, *32*, 10, 528—531.
23. *F. Bachofen, M. Beyer, H. J. Jähne*, Einfluss mechanischer spannungen und elektrischer beanspruchung auf das, I.H.V.S., Zürich, 1975, 622—627.
24. *M. Beyer, G. Löffelmacher*, Untersuchung der chemisch — physikalichen vorgänge bei der ausbildung von teilentlandungskanälen in polyäthylen, Proc. I.H.V.S., Zürich, 1975, 633—637.

Influence of Mechanical Stress on Thermorigid Dielectrics Breakdown

The paper presents the many factors contributing to the initiating of treeings in thermorigid polymers in electrical fields (produced with needle — plane electrodes). The author thoroughly analyses the role of the external and internal mechanical stress (due to the needle electrodes) on the formation of the initial channels as well as the influence of the gas pressure on the formation of some non-conducting channel networks — in the case of the adherent electrodes.

C.Z. 621.315.2

CONTRIBUȚII LA STUDIUL REGIMURILOR TERMICE ALE CABLURILOR DE PUTERE

LUCIA DUMITRIU, C. DUMITRIU*

În lucrare se prezintă un model și un program complex de calcul pentru studiul regimurilor termice ale cablurilor de putere, atît în regim permanent cît și în regim de sarcină variabilă.

I. Introducere

În lucrare se prezintă un model și un program complex de calcul pentru studiul regimurilor termice ale cablurilor de putere, atît în regim permanent cît și în regim de sarcină variabilă.

Valoarea puterii transportate de o rețea de cabluri este limitată de temperatura maximă admisibilă în funcționare a acestora, ceea ce face ca determinarea capacității maxime de transport a rețelei să se efectueze pe baza studiului regimurilor termice ce se ating în funcționare.

Încălzirea cablurilor electrice se produce sub acțiunea curentului electric și a tensiunii aplicate, efectul acestora fiind reprezentat prin surse de căldură în interiorul cablului : pierderi Joule în conductor și în învelișurile metalice (ecrane, armături) respectiv pierderi dielectrice, precum și ca urmarea existenței unor surse de căldură în imediata apropiere a cablurilor (alte cabluri încărcate, conducte de termoficare etc.).

Existența acestor surse interne și externe de căldură determină anumite valori ale cîmpului de temperatură în interiorul cablului și în spațiul de pozare. În regim de încărcare de lungă durată sub sarcină constantă, cîmpul de temperatură este independent de timp, fiind funcție numai de coordonatele punctului în care se calculează în timp ce în regim de încărcare sub sarcină variabilă, cîmpul de temperatură într-un punct oarecare este o funcție de timp.

După evoluția în timp a cîmpului de temperatură, se disting două tipuri de procese : cele ce ating în final regimul termic constant și procese

* Asist ing., catedra Electrotehică ; Asist ing., catedra Centrale și rețele electrice

tranzitorii de durată mai scurtă, cu o temperatură continuu variabilă; aceasta conduce la necesitatea determinării atît a temperaturii maxime de regim permanent sub o anumită încărcare, cît și a variației în timp a temperaturii pentru regimuri de sarcină variabilă.

În principiu, metodele de calcul ale încălzirii cablurilor se pot clasifica în trei categorii: metode empirice, metode analitice și metode numerice.

Cele mai multe tabele de curent și programe de calcul pentru determinarea temperaturilor de funcționare a cablurilor se bazează pe metodologia propusă de Neher și McGrath [2], constînd în realizarea unei analogii între circuitele termice și electrice.

Considerînd circuitul termic în regim permanent format prin înserierea rezistențelor termice ale componentelor, cablului, parcurse de fluxuri de căldură liniare, și aplicîndu-se echivalenții termici ai legii lui Ohm, respectiv ai teoremelor lui Kirchhoff, se obține temperatura de regim permanent corespunzătoare unei anumite încărcări a cablului. Metoda este simplă și poate fi extinsă pentru studiul termic al cablurilor inegal încărcate [8], putînd fi ușor adaptată și pentru studiul sistemelor cu răcire forțată [9]. Dintre metodele analitice, mai utilizată este metoda bazată pe folosirea funcțiilor integral — exponențiale, propusă de Whitehead și Hutchings [4]. În general, ea a fost folosită pentru calculul distribuției temperaturii în mediul din vecinătatea cablului, în timp ce în interiorul cablului temperatura era calculată după o schemă tip Van Wormer [6].

În [7] se prezintă o metodologie unitară de calcul a distribuției temperaturii unui cablu prin aplicarea funcțiilor integral-exponențiale atît în interiorul cît și în exteriorul cablului.

Soluția problemei se obține pe baza principiului superpoziției, luînd în considerare atît cablurile alăturate cît și imaginile lor, în ipoteza lui Kennelly.

Tehnicile numerice folosite în studiul regimului termic al cablurilor — metoda diferențelor finite sau metoda elementelor finite — permit determinarea temperaturii cablului prin rezolvarea ecuației de difuzie a căldurii pentru fiecare porțiune a circuitului termic obținută prin discretizarea interiorului cablului, precum și a mediului înconjurător.

Calculul temperaturii se face pas cu pas, în spațiu și timp, luîndu-se în considerare efectul încălzirii mutuale.

Tehnicile numerice s-au dezvoltat pe măsura perfecționării mijloacelor de calcul, dat fiind că acuratețea lor crește cu creșterea gradului de discretizare a spațiului în care se studiază transferul căldurii, ceea ce implică o memorie corespunzătoare a calculatorului.

În general metodele de calcul ale regimurilor termice ale cablurilor, prezentate în literatură, presupun rezistivitatea electrică a conductorului constantă.

În lucrarea de față se prezintă un model și program complex de calcul al regimurilor termice ale cablurilor electrice ținînd seama de variația rezistivității electrice a conductorului, respectiv a pierderilor prin efect Joule, cu temperatura, într-un proces iterativ.

2. Prezentarea modelului de calcul

Considerînd circuitul termic echivalent al cablului în regim permanent (fig. 1) pe baza analogiei cu circuitele electrice se determină supraîncălzirea conductorului peste temperatura ambiantă:

$$\Delta\theta = \left(W_c + \frac{1}{2} W_d\right) T_1 + [n_c(W_c + W_d) + W_s] T_2 +$$

$$+ [n_c(W_c + W_d) + W_s + W_A] \cdot (T_3 + T_4) \qquad (1)$$

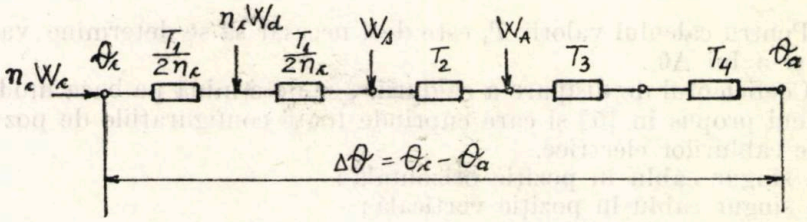


Fig. 1 — Schema echivalentă a circuitului termic în regim permanent

în care:

W_c, W_s, W_A — pierderile prin efect Joule în conductor, manta, armătură;

W_d — pierderile dielectrice;

T_1 — rezistența termică între conductor și mantaua metalică;

T_2 — rezistența termică între mantaua metalică și armătură;

T_3 — rezistența termică a învelișului exterior;

T_4 — rezistența termică externă;

n_c — numărul conductoarelor cablului.

Raportînd pierderile prin efect Joule din manta și armătură la pierderile totale din conductoarele cablului, relația (1) devine:

$$\Delta\theta = \left[RI^2 + \frac{1}{2} W_d\right] T_1 + n_c[RI^2(1 + \lambda_1) + W_d] T_2 +$$

$$+ n_c[RI^2(1 + \lambda_1 + \lambda_2) + W_d](T_3 + T_4) \qquad (2)$$

Determinarea supratemperaturii $\Delta\theta$ impune calculul mărimilor care intervin în relația (2): rezistența electrică a conductorului cablului, pierderile dielectrice, pierderile în manta și armătură și rezistențele termice.

Mărimile R, W_d, λ_1, λ_2, T_1, T_2, T_3 și T_4 pentru cabluri îngropate în canale sau tub se determină conform indicațiilor CEI și normelor românești [10], [11]. Deoarece pentru cablurile pozate în aer aceste norme prevăd o metodă grafică de determinare a coeficientului de disipare a căldurii și a supratemperaturii suprafeței cablului, s-a elaborat o metodă analitică de calcul a rezistenței termice externe, pe care o prezentăm în continuare.

Valoarea lui T_4 pentru cablurile pozate în aer și protejate contra radiațiilor solare este dată de relația :

$$T_4 = \frac{1}{\pi \cdot D_e \cdot h(\Delta\theta_s)^{1/4}} \tag{3}$$

Pentru calculul valorii T_4 este deci necesar să se determine valoarea lui h și a lui $\Delta\theta_s$.

Coeficientul de disipare a căldurii, , se determină pe baza modelului de calcul propus în [5] și care cuprinde toate configurațiile de pozare în aer ale cablurilor electrice.

— un singur cablu în poziție orizontală :
— un singur cablu în poziție verticală ;
— căi orizontale de cabluri instalate în grup vertical :
  a) cabluri alăturate ;
  b) cabluri distanțate la mai mult de 1,2 D_e ;
— căi orizontale de cabluri instalate în grup orizontal ;
  a) cabluri alăturate ;
  b) cabluri distanțate la mai mult de 1,23 D_e ;
— grup de trei cabluri așazate în treflă alăturate ;
— grup de patru cabluri în formație rectangulară alăturate.

În cadrul modelului, h poate fi o funcție implicită sau explicită de $\Delta\theta_s$: $h = f(K(\Delta\theta_s), \chi(\Delta\theta_s)$, sau $h = f(\Delta\theta_s^{1/4}, K(\Delta\theta_s), \chi(\Delta\theta_s))$, unde K și χ sînt variabile auxiliare depinzînd de tempertura ambiantă θ_0 și supratemperatura suprafeței cablului $\Delta\theta_s$. Valorile lor sînt tabelate ca funcții de perechi de valori $(\theta_0, \Delta\theta_s)$. În cadrul programului s-a elaborat o subrutină separată de calcul a lor, prin interpolare liniară într-o matrice.

Supratemperatura $\Delta\theta_s$ este o uncție de h și $\Delta\theta$ se determină dintr-o ecuație de gradul 5 de forma :

$$x^5 + f(h)x^4 = f(h)g(\Delta\theta) \tag{4}$$

în care $x = \Delta\theta_s^{1/4}$

Pentru calculul lui $\Delta\theta_s^{1/4}$ s-a elaborat o subrutină de determinare a unei rădăcini reale a funcției $y(x) = x^5 - f(h)x^4 - f(h)g(\Delta\theta)$ în intervalul [2, 3].

Determinarea valorilor lui h și $\Delta\theta_s$ se realizează într-o subrutină separată, printr-un calcul iterativ, plecînd de la o valoare inițială adoptată pentru $\Delta\theta_s$. Modelul de calcul este adaptat și pentru studiul sistemelor de cabluri cu răcire forțată, externă. Pentru aceasta, indiferent de geometria sistemului, se introduce noțiunea de rezistivitate termică efec-

tivă [9] a mediului înconjurător, reprezentat prin sol și țevile de răcire. Punînd condiția ca această valoare notată ρ_{eef} să determine o aceeași încălzire a cablului j ca și în cazul în care se consideră solul cu ρ_s, în care există sursele reci reprezentate prin țevile de răcire, se obține relația de determinare a valorii rezistivității efective a circuitului termic echivalent:

$$\left(\frac{\rho_{eff}}{\rho_s}\right)_j = 1 + \left[\frac{\sum_{i=n_c+1}^{n} \frac{W_i}{S_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{S_{ij}}}\right] \begin{matrix} i = 1, \ldots n \\ j = 1, \ldots n_c \end{matrix} \tag{5}$$

în care S_{ij} — factorul de configurație a conducției;
W_i — căldura înmagazinată în cablu sau preluată de fluidul de răcire:
n_c — numărul cablurilor din sistem;
$n - n_c$ = numărul țevilor de răcire.

În ecuația (5), factorul geometric S_{ij} atașat cablului j din sistem este definit cu relația:

$$S_{ij} = \frac{4\pi}{\cos h^{-1}\left[\frac{2\left(\frac{Z_i}{r_j}\right)^2}{\left(\frac{d_{ij}}{r_j}\right)^2 + \left(\frac{r_i}{r_j}\right)^2} - 1\right]} \tag{6}$$

în care:
Z_i — adîncimea de pozare a cablului i;
r_i, r_j — razele externe ale componentelor i, j ale sistemului;
d_{ij} — distanța dintre componentele i, j;
Pentru fiecare cablu din sistem

$$W_i = W_c + W_s + W_A > 0 \tag{7}$$

și reprezintă căldura totală acumulată în conductor, manta și armătură. Pentru fiecare țeavă de răcire

$$W_i = m \cdot c_p \cdot \Delta\theta_{f1} < 0 \tag{8}$$

și reprezintă căldura preluată de fluidul de răcire.

3. Descrierea programului de calcul al temperaturii conductorului în regim permanent

Programul de calcul elaborat, a cărui schemă logică este prezentată în fig. 2, permite calculul temperaturii conductorului sub o sarcină I de lungă durată, ținînd seama de variația rezistenței electrice a conductorului

și a rezistenței termice externe în funcție de temperatură, în cadrul unui proces iterativ. Programul principal este organizat în 7 subprograme S I . . .S VII. Suprogramul S V pentru calculul rezistențelor termice este

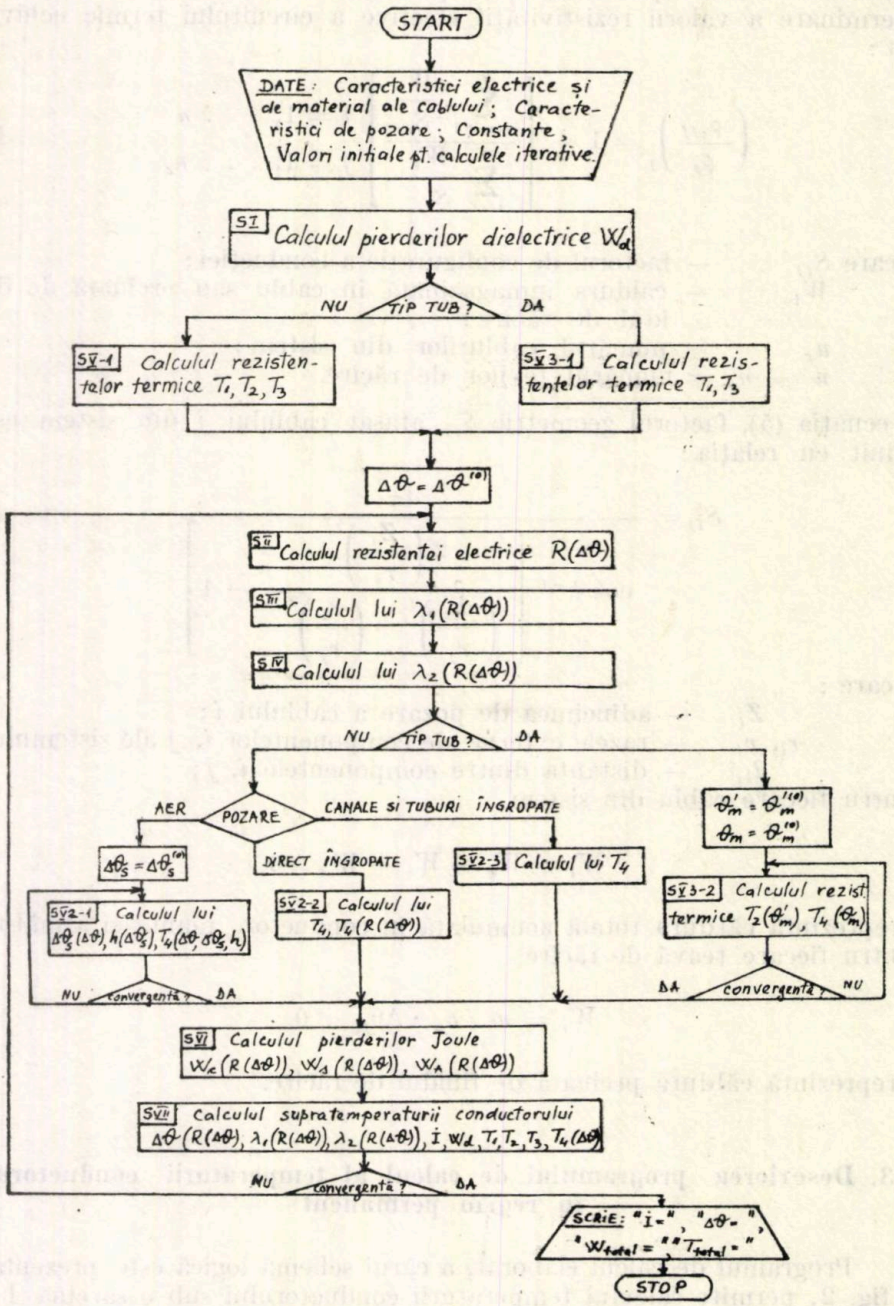


Fig. 2 — Schema logică a programului TEMPER

compus din 6 segmente SV1, SV2 — 1, SV2 — 2, SV2 — 3, SV3 — 1 și SV3. —2.

Pentru calculul lui T_4 la cablurile pozate în aer și a lui T_2 și T_1 la cele în tub, se efectuează cicluri iterative în funcție de $\Delta\theta_s$, θ'_m, respectiv θ_m în interiorul ciclului interativ după $\Delta\theta$.

Cuprinzînd un număr de 35 de subrutine, programul extinde analiza asupra tuturor tipurilor de cabluri și modurilor de pozare, furnizînd în final temperatura de regim permanent corespunzătoare unei anumite încărcări I, valoarea perderilor totale prin efect Joule ale cablului calculate la temperatura determinată și valoarea rezitenței termice totale a circuitului termic la această temperatură.

4. Determinarea răspunsului termic

Pentru a determina răspunsul termic al circuitului la o sarcină treptată de valoare I, se divide circuitul termic în 6 zone [12], două în interiorul cablului și patru în sol, corespunzătoare divizării capacității termice în rapoartele 1, 4, 16, 64 (fig. 3).

Valorile rezistenței și capacităților termice ale schemei echivalente pentru partea reprezentînd interiorul cablului — T'_1, T'_2, C'_1, C'_2 — depind de tipul acestuia și de modul de pozare [13].

Pentru partea de sol elementele schemei echivalente se determină plecînd de la calculul diametrului cilindrului de sol care delimitează circuitul termic, folosind relația:

$$h\frac{D'}{d_c} = \frac{1}{1{,}25}\, h\frac{4h}{d_c} \tag{9}$$

în care D' — diametrul cilindrului de sol
d_c — diametrul exterior al cablului
h — adîncimea de pozare.

Capacitatea termică a solului se determină cu relația:

$$C_{sol} = \frac{\pi c_T}{4}(D'^2 - d_e^2) \tag{10}$$

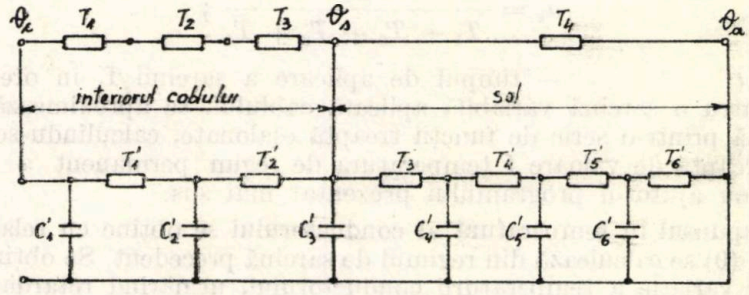


Fig. 3 — Schema echivalentă pentru determinarea răspunsului termic al conductorului

iar capacitățile $C'_3 \ldots C'_6$, se determină ca rapoarte 1, 4, 16, 64 :

$$C'_3 = \frac{C_{sol}}{85}; \quad C'_4 = 4\,\frac{C_{sol}}{85}; \quad C'_5 = 16\,\frac{C_{sol}}{85}; \quad C'_6 = 64\,\frac{C_{sol}}{85}$$

Ținînd seama de faptul că aceste capacități se exprimă prin relații de forma :

$$C'_k = \frac{\pi c_T}{4}(D'^2_k - D'^2_{k-1}) \tag{11}$$

cu $D'^2_2 = d_c$, se determină diametrele D'_k la care se face divizarea circuitului termic. Rezistențele termice $T'_3 \ldots T'_6$ corespunzătoare acestei divizări se determină cu relații de forma :

$$T'_k = \frac{\rho_T}{2\pi} \ln \frac{D'k}{D'_{k-1}} \tag{12}$$

Fiecare din cele 6 celule astfel determinate are un răspuns termic de forma

$$\Delta\theta_k(t) = \Delta\theta_k(\infty)\,(1 - e^{-t/\tau_k}) \tag{13}$$

în care

$\Delta\theta_k(\infty)$ — supratemperatura în regim permanent a celulei k;

$\tau_k = T'_k C'_k$ — constanta termică de timp a celulei k.

Răspunsul în temperatură al conductorului se obține însumînd răspunsurile tuturor celulelor;

$$\Delta\theta_c(t) = \sum_{k=1}^{6} \Delta\theta_k(t) \tag{14}$$

Înlocuind relația (13) în (14), rezultă variația temperaturii conductorului pentru o sarcină treaptă, sub forma :

$$\theta_c(t) = \theta_c(0) + (\theta_c(\infty) - \theta_c(0))\left(1 - \sum_{1=1}^{6} a_k e^{-t/\tau_k}\right) \tag{15}$$

în care

$\theta_c(0)$ — temperatura conductorului la momentul 0 înainte de modificarea valorii sarcinii;

$Q_c(\infty)$ — temperatura de regim permanent a conductorului pentru treapta de curent I;

$$a_k = \frac{T'_k}{T_1 + T_2 + T_3 + T_4};$$

t — timpul de aplicare a sarcinii I, în ore.

Pentru o sarcină variabilă aplicată cablului, se aproximează curba de sarcină printr-o serie de funcții treaptă eșalonate, calculîndu-se pentru fiecare treaptă de valoare I temperatura de regim permanent a conductorului, cu ajutorul programului prezentat mai sus.

Răspunsul în temperatură al conductorului se obține cu relația (11) în care θ (0) se calculează din regimul de sarcină precedent. Se obține astfel curba de variație a temperaturii conductorului, urmărind retardat curba de sarcină. Schema logică de calcul este prezentată în fig. 4.

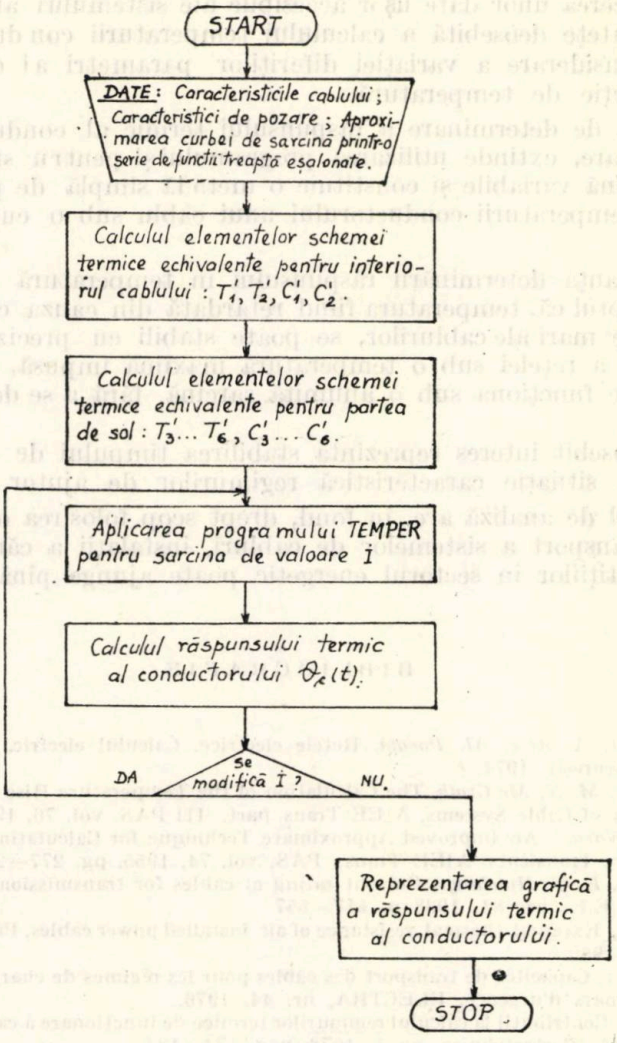


Fig. 4 — Schema logică pentru determinarea răspunsului termic al conductorului

5. Concluzii

Modelul şi programul de calcul al încălzirii cablurilor, prezentate în lucrare, reprezintă un instrument deosebit de util atît în activitatea de proiectare cît şi în cea de exploatare, a sistemelor de cabluri de putere. Ele pot fi folosite pentru optimizarea încărcării cablurilor sub regimuri termice impuse, pentru sistemele deja existente, sau pot fi folosite pentru optimizarea soluţiei de proiectare, luînd în considerare costurile legate de pierderile de energie, de durata de viaţă a cablurilor şi de sistemul de răcire forţată, în diferite regimuri termice.

Programul elaborat este, principial, simplu, nu necesită performanţe deosebite de memorie ale calculatorului şi poate fi utilizat fără dificultăţi,

prin introducerea unor date uşor accesibile ale sistemului analizat. El asigură o acurateţe deosebită a calculului temperaturii conductorului, prin luarea în considerare a variaţiei diferiţilor parametri ai circuitului termic în funcţie de temperatură.

Metoda de determinare a răspunsului termic al conductorului, propusă în lucrare, extinde utilizarea programului şi pentru studiul regimurilor de sarcină variabile şi constituie o metodă simplă de predeterminare a variaţiei temperaturii conductorului unui cablu sub o curbă de sarcină dată.

Importanţa determinării răspunsului în temperatură al sistemului, constă în faptul că, temperatura fiind retardată din cauza constantelor de timp termice mari ale cablurilor, se poate stabili cu precizie capacitatea de transport a reţelei sub o temperatură maximă impusă, sau timpul în care se poate funcţiona sub o anumită sarcină, fără a se depăşi restricţia termică.

Un deosebit interes reprezintă stabilirea timpului de funcţionare în suprasarcină, situaţie caracteristică regimurilor de ajutor după avarie.

O astfel de analiză are, în fond, drept scop folosirea optimă a capacităţii de transport a sistemelor de cabluri, instalaţii a căror pondere în totalul investiţiilor în sectorul energetic poate ajunge pînă la 30%.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Bercovici, A. Arie, Al. Pocată*, Reţele electrice. Calculul electric, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
2. *J. M. Neher, M. N. Mc Grath*, The Calculation of the Temperature Rise and Load Capability of Cable Systems, AIEE Trans. part. III PAS, vol. 76, 1957, pg. 752—763.
3. *F. C. Van Worner*, An Improved Approximate Technique for Calculating Cable Temperature Transients. AIEE Trans., PAS, vol. 74, 1955, pg. 277—281.
4. *S. Whithead, E. E. Hutchings*, Current rating of cables for transmission and distribution, J.I.E.E., nr. 83, 1938 p. 517—557
5. *P. Slaninka*, External thermal resistance of air installed power cables, Proceedings IEE, no 9, 1969.
6. *D. J. Skipper*, Capacités de transport des câbles pour les régimes de charge cycliques et de secours d'urgence, ELECTRA, nr. 44, 1976.
7. *A. Arie, ş.a.*, Contribuţii la calculul regimurilor termice de funcţionare a cablurilor de energie EEA Electrotehnica, nr. 5, 1978, pag. 174—184.
8. *A. Bernath, D. B. Olfe*, Optimization of ampacities for unequally laded und ground power cables, IEEE Trans. on PAS, nr. 7, 1982.
9. *W. Z. Black, P. Burdick*, Ampacities of underground electric power cables in the presence of external forceed cooling, IEEE Trans. on PAS, nr. 10, 1982.
10. x x x Calcul du courant admissible dans les câbles en régime permanent (facteur de charge 100%), Publication CEI 287, 1982.
11. x x x Calculul curentului maxim admisibil în regim permanent, STAS 10955—78.
12. *R. J. Wiseman*, An empirical method for determining transient temperatures of buried cable systems, AIEE Trans. on PAS, vol. 72, 1953, pag. 535—540.
13. *J. H. Neher*, The transient temperature rise of buried cable systems, IEEE Trans. on PAS, nr. 2, 1964, pag. 102—115.

Power Cable Thermal Analysis

The paper presents a model and a complex computer program for power cable thermal analysis, both in steady-state and in transient behaviour.

C.Z.: 681.327.8 :677.014.57
621.39

CODOR 5B/6B UTILIZAT ÎN TRANSMISIUNILE DIGITALE PE FIBRĂ OPTICĂ CU VITEZA DE 8 MBIȚI/SEC.

I. CONSTANTIN, I. CEAPĂ, N. COȚANIS *

Se prezintă parametrii caracteristici ai codurilor de linie binare MB/NB utilizate în sistemele de transmisiuni numerice prin fibra optică. Se descrie metoda de codare și implementarea unui codor în cazul 5B/6B pentru viteza de 8 Mbiți/sec. cu posibilități de utilizare și la viteza de 34 Mbiți/sec.

1. Generalități

Sistemele de comunicație utilizînd fibra optică constituie în prezent mijlocul cel mai eficace de transmisie prin cabluri a semnalelor digitale. Un astfel de sistem este reprezentat schematic în figura 1.

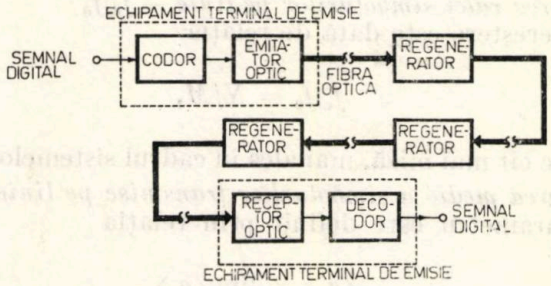


Fig. 1 — Sistem de comunicație digitală utilizînd fibra optică

Semnalul digital, așa cum este obținut de la sursa discretă, este total inadecvat pentru a fi aplicat emițătorului luminos în scopul transmiterii pe linie. De aceea, este necesar ca acest semnal să fie transformat conform unui cod de linie, astfel încît să capete anumite proprietăți ce favorizează transmisiunea sa prin suportul optic, păstrîndu-se totodată posibilitatea refacerii la recepție a semnalului original necodat.

În proiectarea sistemelor de transmisiuni digitale prin fibre optice și în special a codorului și decodorului din echipamentele terminale o atenție

* Conf. dr. ing.; Asist. ing.; Asist. ing., catedra Radio, telefonie și transmisiuni de date

deosebită trebuie acordată alegerii codului de linie. Unii din factorii care influențează această alegere sînt similari celor implicați în sistemele clasice, alții iau în considerare particularitățile specifice echipamentelor optice, particularități ce au făcut ca cele mai uzuale coduri de linie să fie codurile binare de tipul MB/NB. Compararea acestor coduri în scopul alegerii celui optim se face avînd în vedere cel puțin următoarele aspecte: controlul erorilor la repetoarele intermediare, controlul erorilor și sincronizarea de cuvînt la echipamentul de recepție, informația de ceas, densitatea spectrală și simplitatea generală a repetoarelor și echipamentelor terminale. Pentru efectuarea analizei și evaluarea performanțelor fiecărui cod de linie sub toate aceste aspecte este necesară definirea unor parametri caracteristici acestor coduri.

2. Parametrii caracteristici ai codurilor de linie MB/BN

Codurile de linie binare MB/NB transformă un cuvînt binar $B = b_1 b_2 \ldots b_M$, de lungime M, într-un cuvînt binar $A = a_1 a_2 \ldots a_N$, de lungime N, cu $N > M$ și $a_k, b_k \in Q = \{0, 1\}$. Prin această transformare orice secvență digitală $\{b_k\}$ neredundantă aplicată la intrarea codorului și avînd o rată a simbolurilor f_0 va fi convertită într-o secvență digitală de ieșire $\{a_k\}$ redundantă cu o rată a simbolurilor f_c. Redundanța astfel introdusă este folosită în scopul obținerii semnalului de linie care să satisfacă cît mai bine cerințele impuse de transmisia prin fibra optică.

Parametrii caracteristici necesari evaluării performanțelor fiecărui cod de linie sînt definiți în continuare.

a) *Creșterea ratei simbolurilor pe linie* — f_c/f_0

Această creștere este dată de relația

$$f_c/f_0 = N/M, \tag{1}$$

și trebuie să fie cît mai mică, mai ales în cadrul sistemelor de mare viteză.

b) *Valoarea medie a simbolurilor transmise pe linie* — $\langle a_k \rangle$

Acest parametru este definit prin relația

$$\langle a_k \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle a_k \rangle_n, \tag{2}$$

unde

$$\langle a_k \rangle_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}, \tag{3}$$

este valoarea medie a simbolurilor pentru o secvență de lungime n.

Valoarea medie a simbolurilor $\langle a_k \rangle$, intervine în expresia puterii optice medii aplicată la intrarea fibrei:

$$\langle p_{in} \rangle = \langle a_k \rangle \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} h_{in}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{4}$$

unde $h_{in}(t)$ — este impulsul optic de putere care corespunde în cazul codurilor binare, simbolului „1";

T — perioada de succesiune a simbolurilor pe linie.

Din această relație se observă că minimizarea puterii optice medii ce asigură creșterea vieții medii a sursei optice și reducerea zgomotului cuantic la fotodetector implică minimizarea valorii medii a simbolurilor $\langle a_k \rangle$. Pentru majoritatea codurilor MB/NB la care se realizează un echilibru între numărul simbolurilor „1" și „0" transmise pe linie, $\langle a_k \rangle = 0{,}5$.

Pentru a descrie mai bine proprietățile clasei codurilor MB/NB, cu ajutorul parametrului $\langle a_k \rangle$ se definesc și alte caracteristici ale acestor coduri cum sînt suma digitală curentă σ și suma digitală γ a cuvîntului de cod $A = a_1 a_2 \ldots a_N$ transmis pe linie:

$$\sigma = \sum_{k=-\infty}^{n} (a_k - \langle a_k \rangle) = \sum_{k=-\infty}^{n} a'_k \tag{5}$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{N} (a_k - \langle a_k \rangle) = \sum_{k=1}^{N} a'_k \tag{6}$$

Valorile pe care le ia cantitatea a'_k cu care se modifică aceste sume digitale după transmisia unui singur simbol sînt $-0{,}5$ sau $0{,}5$ după cum simbolul a_k transmis este „0" sau „1".

c) *Numărul stărilor de codare* — S_{cod}

Numărul stărilor de codare S_{cod}(numite și stări finale) reprezintă numărul valorilor posibile pe care suma digitală curentă o ia la sfîrșitul fiecărui cuvînt de cod. Acest parametru indică complexitatea codorului și a monitorului decodorului utilizat pentru determinarea ratei erorilor la recepție, deoarece atît codorul cît și decodorul care sînt sisteme digitale secvențiale au numărul de stări finale $S = \{S_i\}$ cu $i = 0, 1 \ldots, (S_{cod-1})$, egal cu S_{cod}. Starea ulterioară a codorului se determină adunînd la indexul „i" al stării prezente suma digitală a cuvîntului transmis pe linie. Se poate arăta ușor că numărul de stări S și valorile sumei digitale sînt limitate pentru codurile MB/NB echilibrate.

d) *Numărul stărilor monitor* — S_{mon}

Numărul stărilor monitor S_{mon} (numite și stări intermediare) reprezintă numărul valorilor pe care suma digitală curentă σ poate să le ia după fiecare simbol. Valoarea lui indică complexitatea monitorului de determinare a ratei erorilor în regeneratoarele de linie și este determinată atît de suma digitală a cuvintelor utilizate cît și de ordinea simbolurilor în cuvînt.

e) *Numărul maxim de simboluri identice consecutive pe linie* — L_{0max} *și* L_{1max}

Pentru codurile binare MB/NB există numai două cazuri cînd pot apare simboluri identice consecutive întîmplător pe linie și anume simboluri „0" consecutive sau „1" consecutive. L_{0max} și L_{1max} trebuie să fie cît mai mici posibile pentru a îmbunătăți extragerea semnalului de ceas necesar

funcționării regeneratoarelor de linie și a echipamentului terminal de recepție.

Ca și S_{mon}, parametrii L_{0max} și L_{1max} depind de suma digitală a cuvintelor de cod utilizate și de ordinea simbolurilor în cuvînt.

3. Codarea 5B/6B

Dintre diferitele coduri binare MB/NB ce pot fi utilizate în sistemele digitale de transmisiune pe fibră optică, cele mai convenabile în urma analizării și comportării lor pe baza parametrilor definiți mai sus, par a fi codurile 3B/4B, 5B/6B și 6B/8B. Aceste coduri au și fost adoptate în majoritatea sistemelor experimentale și sînt menționate în avizele CCITT [4]. Codorul prezentat în această lucrare utilizează codul 5B/6B care realizează cel mai avantajos compromis între complexitatea codării și redundanța introdusă.

Pentru asigurarea unor valori optime parametrilor caracteristici, codul de linie 5B/6B trebuie să utilizeze pentru codarea celor 32 cuvinte de 5 biți, acele cuvinte de 6 biți care au $|\gamma|$ cît mai mic posibil. Deoarece cele 20 cuvinte cu $\gamma = 0$ sînt insuficiente pentru realizarea codării, este necesară utilizarea și de cuvinte cu $\gamma = \pm 1$. Cuvintele cu $\gamma = \pm 2$ și $\gamma = \pm 3$ nu sînt utilizate pentru codare. Toate cuvintele de 6 biți din maximul de 64, care nu sînt utilizate pentru codare, formează grupul cuvintelor fără sens sau interzise (vezi tabelul 2).

Rezultă că prin codarea 5B/6B, fiecărui cuvînt de 5 biți i se pune în corespondență fie un singur cuvînt de 6 biți cu $\gamma = 0$, fie două cuvinte de 6 biți, unul cu $\gamma = +1$, iar celălalt complementarul său cu $\gamma = -1$. Alternînd transmiterea cuvintelor cu $\gamma = +1$ și cu $\gamma = -1$ se obține practic semnalul de linie echilibrat. În acest scop este necesar doar să se cunoască dacă ultimul cuvînt neechilibrat a fost cu $\gamma = +1$ sau cu $\gamma = -1$.

Din cele arătate se deduce că la codarea 5B/6B se utilizează două alfabete de cuvinte A_+ și A_-. Cuvintele cu $\gamma = 0$ aparțin ambelor alfabete, pe cînd cuvintele cu $\gamma = +1$ aparțin alfabetului A_+, iar cele cu $\gamma = -1$ aparțin alfabetului A_- (vezi tabelul 1). Trecerea dintr-un alfabet în celălalt are loc la transmiterea unui cuvînt cu $\gamma = +1$ sau $\gamma = -1$. Dacă s-a transmis un cuvînt cu $\gamma = 0$ alfabetul nu se schimbă.

Deoarece pentru codul 5B/6B suma dintre numărul cuvintelor cu $\gamma = 0$ și numărul cuvintelor cu $\gamma = \pm 1$ este mai mare decît 32, rezultă că se pot obține patru variante ale codării 5B/6B. Dintre acestea, varianta avînd numărul cuvintelor interzise maxim, $N_{int} = 20$, fiind optimă din punct de vedere al sincronizării de cuvînt la recepție, este adoptată în implementarea codorului descris în continuare. Valorile parametrilor caracteristici ai acestei variante sînt: $f_c/f_0 = 1/2$, $\langle a_k \rangle = 0{,}5$ $S_{cod} = 2$, $S_{mon} = 9$ $L_{0max} = 6$ și $L_{1max} = 6$.

Tabelul 1

Lista cuvintelor utilizate de codul 5B/6B ($N_{int} = 20$)

Nr. crt.	Cuvîntul de 5B scris în zecimal și binar		Cuvintele de 6B corespunzătoare:			
			$A_+(\gamma \in \{0, +1\})$		$A_-(\gamma \in \{0, -1\})$	
	z	binar	γ	cuvîntul	γ	cuvîntul
1	1	00001		111000		111000
2	2	00010		110100		110100
3	4	00100		110010		110010
4	5	00101		110001		110001
5	7	00111		101100		101100
6	8	01000		101010		101010
7	10	01010		101001		101001
8	11	01011		100110		100110
9	13	01101		100101		100101
10	14	01110	0	100011	0	100011
11	17	10001		011100		011100
12	18	10010		011010		011010
13	20	10100		011001		011001
14	21	10101		010110		010110
15	23	10111		010101		010101
16	24	11000		010011		010011
17	26	11010		001110		001110
18	27	11011		001101		001101
19	29	11101		001011		001011
20	30	11110		000111		000111
21	0	00000		111010		000101
22	3	00011		111001		000110
23	6	00110		110110		001001
24	9	01001		110101		001010
25	12	01100		110011		001100
26	15	01111	+1	101110	—1	010001
27	16	10000		101101		010010
28	19	10011		101011		010100
29	22	10110		011110		100001
30	25	11001		011101		100010
31	28	11100		011011		100100
32	31	11111		010111		101000

Tabelul 2

Lista cuvintelor interzise pentru codul 5B/6B ($N_{int}=20$)

Nr. crt.	γ	Cuvîntul interzis	Nr. crt.	γ	Cuvîntul interzis
1	3	111111	11	—3	000000
2	2	111110	12	—2	000001
3	2	111101	13	—2	000010
4	2	111011	14	—2	000100
5	2	110111	15	—2	001000
6	2	101111	16	—2	010000
7	2	011111	17	—2	100000
8	1	111100	18	—1	000011
9	1	001111	19	—1	110000
10	1	100111	10	—1	011000

4. Realizarea codorului 5B/6B

Codorul 5B/6B este implementat folosind un sistem cu stări finite [1]. Pentru a putea fi descris, se asociază fiecărui cuvînt de 5 biţi un vector

$$x = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]^T, \tag{7}$$

care corespunde variabilelor de intrare ale sistemului. Prin x° se notează vectorii corespunzători cuvintelor de 5 biţi care prin codare sînt transformate în cuvinte de 6 biţi cu $\gamma = 0$, iar prin x^e restul vectorilor din spaţiul de intrare. În mod analog, fiecărui cuvînt de 6 biţi de la ieşirea codorului se ataşează vectorul

$$y = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4,]^T \tag{8}$$

şi se notează cu y° vectorii corespunzători cuvintelor de 6 biţi avînd suma digitală $\gamma = 0$ şi cu y^+, respectiv y^-, vectorii corespunzători cuvintelor de 6 biţi avînd suma digitală $\gamma = +1$, respectiv $\gamma = -1$.

Sistemul va avea două stări notate S_0 şi S_1 corespunzătoare celor două alfabete. În starea S_0 codorul generează cuvinte de 6 biţi din alfabetul A_+, iar în starea S_1, cuvinte de 6 biţi din alfabetul A_-. Cu notaţiile prezentate şi respectînd regula de codare descrisă în paragraful anterior evoluţia codorului în timp poate fi descrisă de graful de tranziţie din figura 2.

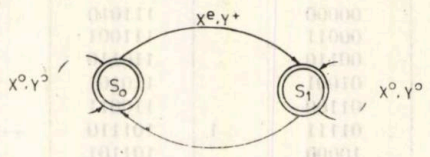


Fig. 2 — Graful de tranziţii al codorului 5B/6B

Schema de principiu a codorului este reprezentată în figura 3. Datele aplicate la intrare sînt încărcate serie în registrul S/P, la fiecare impuls de ceas CK1. Acest semnal de ceas, cu frecvenţa de 8,448 MHz, este extras

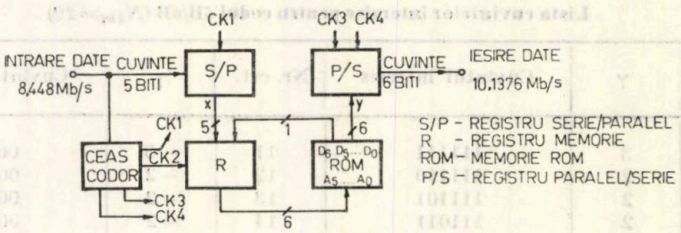


Fig. 3 — Codor 5B/6B.

din datele de intrare. Prin divizarea sa cu 5, se formează CK2 care încarcă în registrul R cuvîntul de 5 biţi şi bitul D_6 de la ieşirea memoriei ROM, corespunzător stării ulterioare a codorului.

Semnalul de ceas CK3, în fază cu CK2, încarcă în registrul P/S cuvîntul de 6 biți rezultat în urma codării. Pentru buna funcționare a codorului, semnalul de ceas CK3 satisface timpii necesari de propagare ai memoriei ROM și de stabilire ai registrului P/S. Serializarea cuvîntului de 6 biți încărcat în registrul P/S se face cu semnalul de ceas CK4. Conținutul memoriei ROM aparținînd codorului este prezentat în tabelul 3.

Tabelul 3

Conținutul memoriei codorului 5B/6B

Adrese		Date	
$A_0 \ldots A_4$	A_5	$D_0 \ldots D_5$	D_6
x°	S_0	y°	S_0
x^e	S_0	y^+	S_1
x°	S_1	y°	S_1
x^e	S_1	y^-	S_0

5. Concluzii

Codorul realizat în urma contractului cu CCSITT —IPA București a răspuns bine testelor de laborator. Numărul redus de componente utilizate asigură fiabilitate crescută și consum mic de putere. Schema de principiu poate fi aplicată și la realizarea unui codor pentru transmisiuni de date cu o viteză de 34 Mbiți/sec.

BIBLIOGRAFIE

1. *L. A. Zadeh, E. Polak*, System Theory, McGraw-Hill, 1969.
2. *Al. Spataru*, Teoria transmisiunii informației, Editura Tehnică, București, 1965.
3. *E. Balicco, G. Iudicello*, Binary Coding in Fiber Optic Digital Transmission with Respect to Timing Extraction and Error Monitoring, Telettra S.P.A., March 1976.
4.*** Binary Line Codes of Digital Transmission on Optical Fibers, CCITT — Period 1977 — — 1980, Study Group XVIII — Contributions No. 291, Italian Administration, March 1979.

5B/6B Encoder for 8 Mbits/s Fiber Optic Data Transmission

The parameters of MB/NB binary codes used in fiber — optic data transmission are presented. The encoding method and the implementation of a 5B/6B encoder for 8 Mbit/s and possible use for 34 Mbits/s are described.

C.Z.: 621.377.621.1

VARIABLE SHIFT-REGISTER GENERATORS

D. A. STOICHESCU*

The general methods for developing variable linear switching circuits for shift-register generators are presented; the design procedure is illustrated by an example, and, finally, some possible applications are mentioned.

1. Introduction

The general form of a shift-register generator with fixed structure is presented in Fig. 1; the way of transforming it into a variable one and the design procedures make the object of the paper.

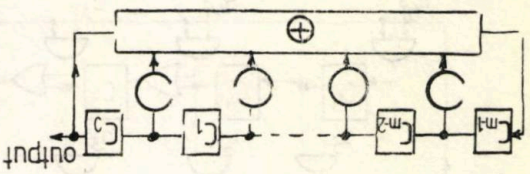


Fig. 1 — General circuit of a shift-register generator

2. Variable Shift-Register Generators

The sequences generated by the circuit represented in Fig. 1 are determined by its characteristic polynomial $g(X)$; this circuit becomes variable if $g(X)$ is not fixed but selectable between a group of s polynomials. To attain this object, two sets of parameters — a_j, for changing the coefficients of $g(X)$ and b_j, for changing the input point—are necessary (see Fig. 2); their values are generated by a control unit. The algorithm for elaborating such a circuit is the following:

1° The group of the polynomials $g_i(X)$ is listed and the number M of the division shift-register storage devices C_i is determined: $M = m_{max}$, the maximum of the polynomials degrees. The values taken

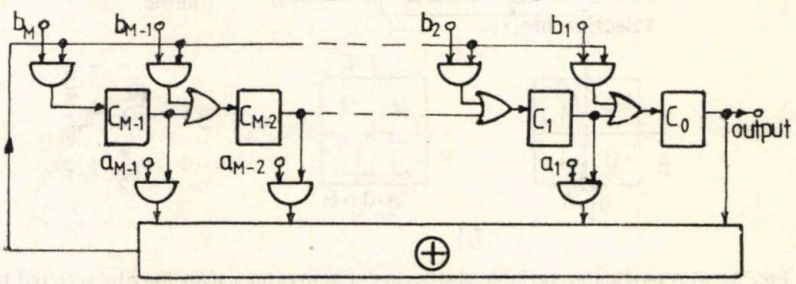


Fig. 2 — Variable shift-register generator

by the parameters a_j and b_j depending on the coefficients g_{ij} are listed in a table; for a given polynomial $g_i(X) = g_{i0} + g_{i1}X + \ldots + g_{im}X^m$ these values are:

$$a_{ij} = \begin{cases} g_{ij} & \text{if } j < m \\ 0 & \text{if } j \geqslant m \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = m \\ 0 & \text{if } j \neq m \end{cases}$$

2° The control unit is designed: it is formed of a counter whose states number is s and two decoders generating the parameters a_j and b_j; their structures are determined taking into account the relationship between the parameters' values and the counter output.

Example: A particular variable shift-register generator is presented in Fig. 3.a) whose characteristic polynomials are:

$$g_0(X) = 1 + X$$

$$g_1(X) = 1 + X + X^3$$

$$g_2(X) = 1 + X^2 + X^3 + X^4$$

$$g_3(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6$$

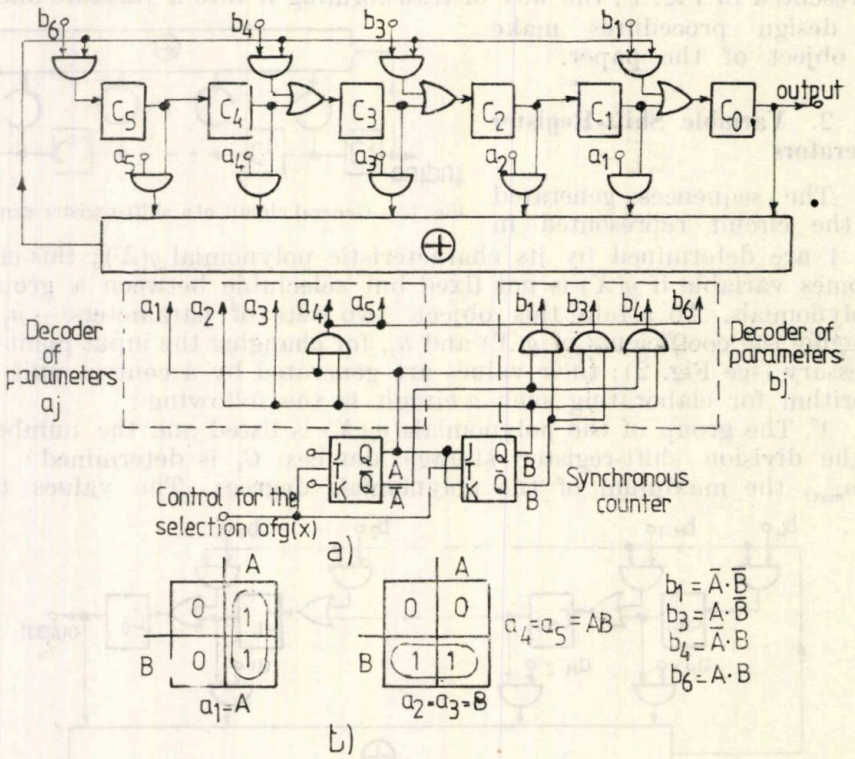


Fig. 3—a) A particular variable shift-register generator; $g(X)$ may be selected from a set of four polynomials. b) Expressions of parameters a_j and b_j.

The number of the storage devices is $M = 6$; the logical expressions of the parameters a_j and b_j are indicated in Fig. 3.b). Their values and the correspondence with the outputs of the control unit synchronous counter are given in table 1.

Table 1

Polynomial	State of counter		Parameters a_j					Parameters b_j					
	A	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$g_0(X)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$g_1(X)$	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$g_2(X)$	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$g_3(X)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1

If the number of the polynomials $g_i(X)$ is too large, the values of the parameters may be stored in two ROMs, their addresses being indicated by the counter.

3. The Applications of the Variable Shift-Register Generators

The variable shift-register generators may be used everywhere the fixed one are used; they increase systems versatility.

For instance, in pseudorandom ciphering of data, by means of variable shift-register generators, the period of pseudorandom generated sequences is enlarged and the cryptosystem becomes better.

REFERENCES

1. *W. W. Peterson*, Error Correcting. Codes, The M. I. Press. Cambridge, Mass. (June, 1968),
2. *Al. Spătaru*, Teoria transmisiunii informației. Editura Didactică și Pedagogică. (București. 1983).

Generatoare de secvențe pseudoaleatoare cu registre de deplasare cu reacție cu structură variabilă

Sînt prezentate metodele generale de elaborare a registrelor de deplasare cu structură variabilă; metoda de proiectare este ilustrată cu ajutorul unui exemplu și, în final, sînt menționate cîteva aplicații posibile

C.Z. 62—192

ASUPRA UNUI PARADOX ÎN TEORIA FIABILITĂȚII

A. MIHALACHE *

Lucrarea elucidează un rezultat aparent paradoxal din teoria fiabilității arătînd că modelul prognozei evoluției unui sistem depinde de momentul observării sale.

1. Paradoxul în cazul sistemelor fără reînnoire

Modelul general al fiabilității unui sistem constă în distribuția timpului de funcționare pînă la defectare $f(x)$. Cunoașterea legii de distribuție implică posibilitatea prognozei defectării sistemului, adică deducerea legii de distribuție a duratei de viață reziduală $V(t)$ la orice moment t la care sistemul nu s-a defectat încă (fig. 1). Fie $X = t + V$ timpul de funcționare pînă la defectare și $f(x)$ densitatea de probabilitate asociată. Distribuția duratei de viață reziduală, condiționată de buna funcționare a sistemului la momentul t este:

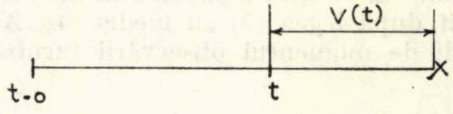


Fig. 1 — Prognoza evoluției sistemului fără reînnoire

$$f_v\ (v,\ t) = f(t + v)/R(t) \qquad (1$$

Durata medie de viață reziduală este:

$$M_v = \frac{1}{R(t)} \int_0^\infty v\, f(t + v)\mathrm{d}v = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(x)\mathrm{d}x \qquad (2)$$

unde $R(x) = \int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$ este funcția de fiabilitate a sistemului.

Conform relației (2), media timpului de funcționare X este $t + \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R\ x)\mathrm{d}x$. Pe de altă parte, media variabilei X este $\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x$, ceea ce pare contradictoriu.

---

* Șef lucrări dr. ing., catedra Tehnologie electronică și microelectronică

Soluția aparentului paradox pornește de la observația că distribuția timpului de funcționare X depinde de poziționarea observatorului la momentul t, fapt care îi furnizează informația că în intervalul $(0, t)$ sistemul nu s-a defectat. Ca urmare, distribuția lui X condiționată de momentul de observare t este :

$$g(x, t) = \begin{cases} 0 & x < t \\ \dfrac{f(x)}{R(t)} & x \geqslant t \end{cases} \tag{3}$$

Calculul mediei timpului de funcționare x pornind de la distribuția (3) conduce la :

$$M_x = t + \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(x)\mathrm{d}x = t + M_v \tag{4}$$

În concluzie, pentru un observator situat la momentul $t = 0$ distribuția timpului de funcționare este $f\,x)$ cu media $\int_0^\infty R(x)\mathrm{d}x$. Situarea observatorului la vîrsta t a sistemului face ca timpul de funcționare să fie distribuit după legea (3) cu media (4). Acest relativism al modelului fiabilității de momentul observării furnizeazl soluția paradoxului.

2. Paradoxul în cazul sistemelor cu reînnoire

Se presuupne că sistemul descris de distribuția timpului de funcționare $f(x)$ este reînnoit practic instantaneu după fiecare defectare, fiind readus la starea inițială. Prognoza proximei defectări poate fi efectuată utilizînd teoria proceselor de reînnoire [1, 2]. Un proces simplu de reînniore este descris de succesiunea intervalelor de funcționare $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots X_n, \ldots$ independente și identic distribuite conform legii $f(x)$. Mediile lor sînt egale cu $m = \int_0^\infty R(x)\mathrm{d}x$. Momentul observării t situat între două reînnoiri succesive divide intervalul $x(t)$ în două sub-intervale $U(t)$ și $V(t)$ care reprezintă respectiv vîrsta reală a sistemului și durata de viață reziduală la momentul calendaristic t (fig. 2). Densitățile de probabili-

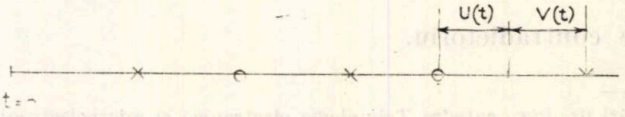


Fig. 2 — Prognoza evoluției sistemului cu reînnoire

tate ale acestor variabile sînt [1]:

$$f_u(u,t) = \begin{cases} h(t-u)\ R(u) & u \leqslant t \\ 0 & u > t \end{cases} \tag{5}$$

$$f,(v,t) = f(t+v) + \int_0^t h(t-u)\, f(u+v)\, du$$

unde $h(t)$ reprezintă densitatea de reînnoire, calculabilă pornind de la distribuţia $f\,x)$ [1]. Pentru interpretarea expresiilor (5), menţionăm că $h(t)\,\Delta t$ reprezintă probabilitatea reînnoirii sistemului în intervalul $(t,\ t+\Delta t)$.

În cazul sistemelor fără uzură $h(t) = \lambda = \text{const.}$, $R(x) = e^{-\lambda x}$ iar distribuţiile (5) devin:

$$f_u(u,t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u}; & u < t \\ e^{-\lambda u}; & u = t \\ 0; & u > t \end{cases} \tag{6}$$

$$f_v(v,\ t) = \lambda e^{-\lambda v}$$

Mediile duratelor U şi V sînt:

$$M_U = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t};$$

$$M_V = \frac{1}{\lambda} \tag{7}$$

În general, orice proces de reînnoire se staţionează pentru $t \to \infty$, adică densitatea de reînnoire tinde către o constantă eg ală cu inversul medie duratelor de funcţionare m. Distribuţiile (5) au în acest caz expresiile asimptotice

$$\lim_{t\to\infty} f_u(u,\ t) = \frac{R(u)}{m};$$

$$\lim_{t\to\infty} f_v(v,\ t) = \frac{R(v)}{m} \tag{8}$$

Se observă că, în cazul sistemelor fără uzură, procesul de reînnoire este de la început staţionarizat deoarece relaţiile (6) şi (8) coincid.

Paradoxul poate fi pus în evidenţă comparînd media duratei de funcţionare X cu media sumei variabilelor $U + V$. Se ştie, pe de o parte,

că media duratelor de funcţionare între defectări este m. Pe de altă parte, în regim staţionar avem :

$$M_U = M_V = \frac{1}{m}\int_0^\infty xR(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2m}\int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

Deoarece $x(t) = U(t) + V(t)$ rezultă media lui $x(t)$ egală cu $\frac{1}{m}\int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x$ în loc de m şi în aceasta constă paradoxul.

Explicarea aparentului paradox se bazează pe observaţia că distribuţia duratei între defectări depinde de poziţia observatorului. Dacă aceasta se situează în momentul unei reînnoiri, distribuţia duratei pînă la reînnoirea următoare este $f(x)$. Dacă se situează la un moment intermediar t, distribuţia $f(x)$ a lui $x(t)$ este condiţionată de efectuarea unei reînnoiri în jurul unui moment τ anterior lui t, eveniment ce are probabilitatea $h(\tau)\mathrm{d}\tau$. Pentru $x < t$, momentul observării nu poate fi situat în primul interval de funcţionare iar distribuţia necondiţionată a lui $x(t)$ este, conform formulei probabilităţii totale :

$$g(x, t) = \int_{t-x}^{t} h(\tau)f(x)\mathrm{d}\tau\,; \quad x < t \tag{10}$$

Pentru $x > t$, distribuţia lui $x(t)$ este $f(x)$ dacă t este situat în primul interval de funcţionare şi $h(\tau)f(x)$ ($\tau \in (0, t)$) dacă t este situat într-un interval oarecare. Ca urmare, conform formulei probabilităţii totale :

$$g(x, t) = f(x) + \int_0^t h(\tau)f(x)\mathrm{d}\tau\,; \quad x > t \tag{11}$$

Dacă $t = 0$, observatorul se situează la începutul procesului şi $g(x, 0) = f(x)$. În regim staţionar, pentru $t \to \infty$, dsitribuţia lui $g(x, t)$ devine :

$$\lim_{t\to\infty} g(x, t) = \frac{xf(x)}{m} \tag{12}$$

Media intervalului în care se situează observatorul este deci :

$$M_{x(t)} = \frac{1}{m}\int_0^\infty x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = M_U + M_V \tag{13}$$

diferită de cea aşteptată de un observator situat la momentul începerii procesului.

În felul acesta nu mai apare nici o contradicție între cele 2 moduri de exprimare a mediei lui $x(t)$.

Pentru sistemele fără uzură, expresiile (9) și (10) devin:

$$g(x, t) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x \leqslant t \\ \lambda(1 + \lambda t) e^{-\lambda x} & x > t \end{cases} \tag{14}$$

Media intervalului $x(t)$ este :

$$M_{x(t)} = \int_0^\infty x g(x, t)\, dx = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = M_U + M_V \tag{15}$$

În regim staționar, media duratei între reînnoiri este în acest caz dublă față de cea prezentată la începutul procesului de reînnoire.

3. Concluzii

Explicația paradoxului pus în evidență constă în recunoașterea faptului că distribuția duratelor de funcționare ale unui sistem depinde de momentul observării acestuia.

Pentru un observator situat la momentul inițializării funcționării sistemului, orice durată de funcționare are distribuția $f(x)$ și media m. Pentru un observator situat al un moment arbitrar t, durata de funcționare a unui sistem fără reînnoire are distribuția (3) cu media (4) iar durata de funcționare a unui sistem cu reînnoire are distribuția dată de expresiile (10) și (11) iar media, în regim staționar, dată de expresia (13).

Pentru a da un exemplu intuitiv, se consideră că fluxul autobuzelor într-o stație este de tip Poisson cu intensitatea λ. Situația este echivaelntă cu a unui sistem fără uzură cu reînnoire. Un călător care tocmai a pierdut autobuzul are de așteptat în medie $1/\lambda$ unități de timp pînă la sorirea următorului. Un alt călător, sosit mai tîrziu, are de așteptat în medie tot atît timp. Pentru ambii călători, precedentul autobuz a trecut cu $1/\lambda$ unități de timp în urmă. Ca urmare, al doilea călător consideră că intervalul mediu între autobuze este $2/\lambda$ în timp ce primul consideră intervalul între autobuze egal cu $1/\lambda$.

BIBLIOGRAFIE

1. *D. R. Cox*, Renewal Theory, John Wiley, New York, 1962.
2. *M. Iosifescu*, ş.a. Elemente de modelare stohastică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.
3. *Gh. Mihoc, S.P. Niculescu*, Procese stohattice de reinnoire, Editura Academiei, Bucureşti, 1982,

On a Paradox in Reliability Theory

An apparent paradox in reliability theory is explained by the dependency of reliability models on the prediction time.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1986

Kais Aboud — Contribuții la studiul motoarelor electrice pas-cu-pas (5.VI.1986) Conducător științific prof. dr. ing. Alexandru Fransua

Silvia Margareta Marghitu — Contribuții la studiul fasciculelor de ioni din generatoarele de neutroni (19.VI.1986) Conducător științific prof. dr. docent Alexandru Timotin

Cristian Traian Bârcă — Optimizarea izolațiilor în aparatajul capsulat în hexafluorură de sulf— SF_6 (12.VII.1986). Conducător științific prof. dr. docent Gheorghe Hortopan

Valer Giurgiu — Izolația în hexafluorură de sulf (SF_6) a echipamentului electric de înaltă tensiune capsulat (12.VII.1986). Conducător științific prof. dr. docent Gheorghe Hortopan

Nicolae Cazacu — Probleme de comutație în mașinile electrice (26.IX.1986). Conducător științific prof. dr. ing. Constantin Bălă

Gabriela Valentina Spineanu — Cîmpuri electromagnetice și fenomene asociate în cuplajele cu curenți turbionari (23.X.1986). Conducător științific prof. dr. docent Andrei Țugulea

Viorel Ovidiu Virgil Măriеș — Metode numerice pentru studiul cîmpului electromagnetic (12.XII.1986) Conducător științific prof. dr. docent Andrei Țugulea

RECOMANDĂRI PRIVIND CONȚINUTUL ȘI REDACTAREA MANUSCRISELOR

În vederea menținerii unui conținut corespunzător și pentru uniformizarea prezentării articolelor, la înaintarea acestora pentru publicare autorii sînt rugați să țină seama de următoarele recomandări :

1. Lucrările să fie originale și să aibă caracterul unor comunicări științifice. Se acceptă numai lucrări care nu au mai fost publicate. Nu se vor face demonstrații dezvoltate, ci se vor prezenta rezultatele și informațiile necesare în vederea aplicării acestora.

2. Se vor publica și lucrări din domeniile matematicii, fizicii și chimiei, cu deosebire dacă ele prezintă un interes deosebit pentru activitățile inginerești.

3. Manuscrisul va fi dactilografiat pe coli format A4, la 2 rînduri, cu panglică neagră, pe o singură față a foii de hîrtie. Textul integral, inclusiv figurile, nu vor depăși 8—10 pagini.

4. Titlul, dactilografiat cu majuscule și subliniat, trebuie să fie cît mai scurt.

5. Sub titlu se scriu prenumele autorilor (inițiala ; pentru autoare se va scrie prenumele întreg) și numele. Gradul didactic, titlul științific și instituția (pentru persoanele din institutul nostru se menționează numai catedra ; cînd autorii lucrează la aceeași catedră sau instituție denumirea acesteia se scrie o singură dată) se scriu într-o notă de subsol pe prima pagină.

6. Articolul va fi precedat de un rezumat de 5—6 rînduri în limba de redactare a lucrării, dactilografiat la $1^1/^2$ rînduri.

7. Din punct de vedere redacțional, prezentarea conținutului propriu-zis se face conform STAS 8660-70, folosindu-se exprimarea impersonală (persoana a 3-a). Textul va fi dactilografiat cît mai estetic fără să abunde în cuvinte despărțite. La început de aliniat se lasă un spațiu de 7 semne.

8. Titlul subcapitolelor se scrie cu majuscule și nesubliniat.

9. Formulele se scriu pe cît posibil la mașină ; în rest, vor fi scrise de mînă, cu tuș negru, foarte citeț. Numerele pentru identificarea relațiilor matematice se scriu între paranteze rotunde, în partea dreaptă a paginii.

10. Tabelele vor avea titlu și vor fi numerotate în ordine.

11. Desenele se execută în tuș negru, pe hîrtie de calc, iar explicațiile se scriu cu șablonul. Legenda fiecărei figuri (dacă există) va fi prezentată într-un borderou de figuri, pe o foaie separată.

12. Bibliografia se scrie la sfîrșitul articolului, după capitolul de Concluzii, nu pe pagină separată, conform STAS 6158-70. Pentru prescurtarea titlurilor de publicații periodice se vor consulta STAS 6074-74 și listele din revistele de referate. Citarea bibliografiei se face astfel : 1) pentru cărți : inițiala și numele autorilor, titlul, editura, orașul, anul ; 2) pentru periodice : inițiala și numele autorilor titlul articolului, titlul periodicului, numărul, anul.

13. După bibliografie se mai prezintă un rezumat, dactilografiat la $1^1/^2$ rînduri : într-o limbă străină (rusă, engleză, germană, franceză) — dacă lucrarea este redactată în limba română, respectiv în limba română — dacă lucrarea este redactată într-o limbă străină (rusă, engleză, germană, franceză). Rezumatul va fi precedat de titlul lucrării în limba de redactare a rezumatului.

14. La depunerea lucrării, autorii vor prezenta o declarație din care să reiasă că nu conține secrete de stat.

Lucrarea urmează să fie publicată după recomandarea acesteia de către 2 referenți desemnați de comitetul de redacție.

COMITETUL DE REDACȚIE

I. P. Informația c. 2703

40 480